INFORMATIQUE DU BÂTIMENT

Mathématiques

1er semestre

Grandeurs et masses

Table des matières

Unité SI

Le **Système International d'unités**, ou **SI,** est le système d'unités le plus largement employé au monde pour les grandeurs physiques.

Les **unités SI** reposent sur sept **unités de base**:

1. Mètre (m) pour la longueur
2. Kilogramme (kg) pour la masse
3. Seconde (s) pour le temps
4. Kelvin (K) pour la température
5. Ampère (A) pour l'intensité électrique
6. Candela (cd) pour l'intensité lumineuse
7. Mole (mol) pour la quantité de matière

Outre ces unités de base, il existe aussi des **unités dérivées** qui ont leur propre nom et qui revêtent une grande importance. Elles sont formées par la combinaison d'unités de base.

Parmi les plus importantes, on trouve:

- pour la *force le Newton* (N; 1N = 1 kg*m/s^2)
- pour l'*énergie* le *Joule* (J; 1J = 1 N*m = 1kg*m^2/s^2)
- pour la *puissance* le *Watt* (W; 1W = 1 J/s = 1kg*m^2/s^3)
- pour la *pression* le *Pascal* (Pa; 1Pa = 1N/m2 = 1kg/m*s2)
- pour la *fréquence* le *Hertz* (Hz; 1Hz = 1s-1)
- pour la *charge électrique* le *Coulomb* (C; 1C = 1A*s)
- pour la *tension électrique* le Volt (V; 1V = 1W/A)
- pour la *résistance électrique* le *Ohm* (Ω; 1Ω = 1V/A)
- pour la *capacité électrique* le *Farad* (F; 1F = 1A*s/V)
- pour l'*inductance* le *Henry* (H; 1H = 1V*s/A)
- pour le *flux magnétique* le *Weber* (Wb; 1Wb = 1V*s)
- pour l'*induction magnétique* le *Tesla* (T; 1T = 1V*s/m2)
- pour l'*éclairement lumineux* le *Lux* (lx; 1lx = 1lm/m2)
  La lampe normale (lampe normalisée) qui émet un flux lumineux de 1 lumen (lm) dans toutes les directions possède une intensité lumineuse de 1 candela (cd).

Résolutions établies au niveau international					
Nombre	Puissance de 10	Dési-gnation	Abré-viation	Exemple	
1000000000000000000 = 1 Trillion	= 10^{18}	Exa	E	10^{18} As	= 1 EAs
1000000000000000 = 1 Billiard	= 10^{15}	Peta	P	10^{15} C	= 1 PC
1000000000000 = 1 Billion	= 10^{12}	Tera	T	10^{12} Ω	= 1 TΩ
1000000000 = 1 Milliard	= 10^{9}	Giga	G	10^{9} Hz	= 1 GHz
1000000 = 1 Million	= 10^{6}	Mega	M	10^{6} Ω	= 1 MΩ
1000 = 1 Millier	= 10^{3}	Kilo	k	10^{3} g	= 1 kg
100 = 1 Centaine	= 10^{2}	Hekto	h	10^{2} l	= 1 hl
10= 1 Dizaine	= 10^{1}	Deka	da	10^{1} g	= 1 dag
1 = 1 Unité	= 10^{0}				
1/10 = 1 Dixième	= 10^{-1}	Dezi	d	10^{-1} m	= 1 dm
1/100 = 1 Centième	= 10^{-2}	Zenti	c	10^{-2} m	= 1 cm
1/1000 = 1 Millième	= 10^{-3}	Milli	m	10^{-3} S	= 1 mS
1/1000000 = 1 Millionième	= 10^{-6}	Mikro	µ	10^{-6} V	= 1 µV
1/1000000000 = 1 Milliardième	= 10^{-9}	Nano	n	10^{-9} A	= 1 nA
1/1000000000000 = 1 Billionième	= 10^{-12}	Pico	p	10^{-12} F	= 1 pF
1/1000000000000000 =1 Billiardième	= 10^{-15}	Femto	f	10^{-15} H	= 1 fH
1/1000000000000000000 = 1 Trillionième	= 10^{-18}	Atto	a	10^{-18} C	= 1 aC

1.1 Calcul avec des unités SI

1.1.1 Exercice: calculer avec des unités SI

(Zastrow p13)

1. $U = 0{,}06V + 30mV + 80000\mu V + 3*10^{2}mV + 4*10^{-4}kV =$
2. $I = 0{,}38*10^{-1}A + 1{,}7*10^{3}mA + 5*10^{5}\mu A + 300mA + 0{,}7A =$
3. $R = 0{,}47k\Omega + 2{,}2*10^{2}\Omega + 5{,}6*10^{5}m\Omega + 8{,}2*10^{-4}M\Omega + 100\Omega =$
4. $P = 5*10^{9}\mu W + 3*10^{3}W + 5{,}5kW + 2500W + 7*10^{6}mW =$
5. $U = 0{,}005V + 8*10^{-2}mV + 14*10^{-4}V + 3{,}6*10^{1}\mu V + 4200*10^{-2}\mu V =$
6. 220V * 0,25A =
7. $\sqrt{(2{,}5mA)^2 + (2mA)^2} =$
8. 345pAs/V * 200V =
9. 49VA / (14kA * 7mV) =
10. 48µVA / 12mA =
11. $\frac{1}{40\ 1/s * 2kV/A} =$
12. $24As^2 / (3ms * 2kA) =$
13. $27\mu\Omega^2 / 3m\Omega =$
14.

1.1.2 Exercice: calculer avec des mesures données:

1. $\frac{k}{m}$ =
2. $\frac{1}{k*m}$ =
3. $1/\mu$ =
4. $G*\mu$ =
5. $k*\mu$ =
6. $M*p$ =
7. $\frac{G*m}{M}$ =
8. $(\mu*k)/m$ =
9. $\frac{n*M}{k}$ =
10. $(n*k)/(\mu*m)$ =
11. $\frac{m*M}{n*G}$ =
12. $\frac{k*G}{M}$ =
13. $m*G$ =
14. $\frac{1}{k}$ =
15. $k*p$ =
16. $\frac{k}{m}$ =
17. $m*m$ =
18. $1/(k*\mu)$ =
19. $(M*\mu)/m$ =
20. $\frac{m*M}{k}$ =
21. $(k*\mu)/m$ =
22. $\frac{m*G}{M*k}$ =
23. $\frac{1}{m}$ =
24. $M*m$ =
25. $\mu*k$ =
26. $\frac{1}{M}$ =
27. $M*p$ =
28. $\frac{m}{k}$ =
29. $k*k$ =
30. $\frac{1}{m*M}$ =
31. $(m*k)/\mu$ =
32. $\mu*\frac{k}{m}$ =
33. $(p*M)/\mu$ =
34. $\mu*\frac{G}{m*M}$ =
35. $p*k$ =
36. $\frac{1}{G}$ =
37. $k*n$ =
38. $\frac{M}{k}$ =
39. $\mu*\mu$ =
40. $M*p*k$ =

2 Théorie des fonctions I

2.1 Méthodes de représentation graphique

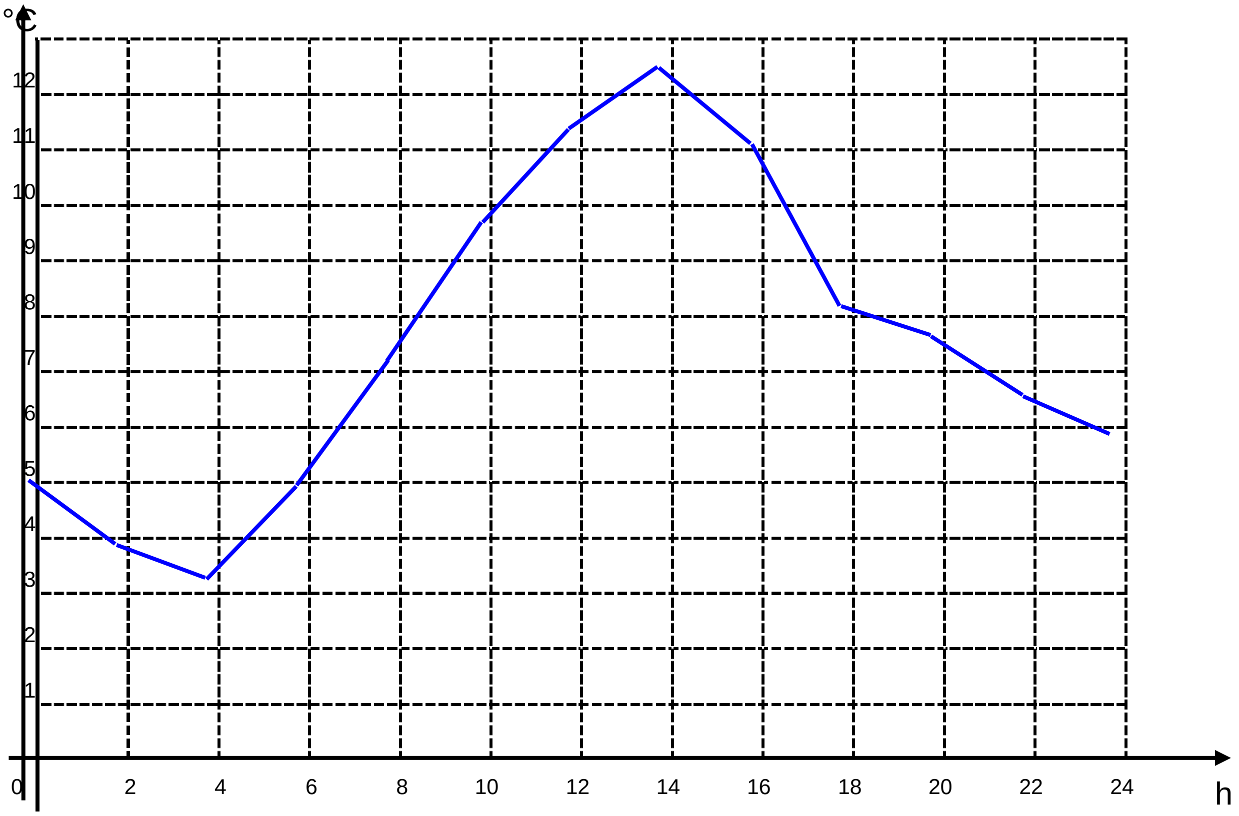
Les relations simples sont souvent représentées graphiquement sous forme d’un diagramme. Des séries d’observations de la vie quotidienne ou professionnelle sont par exemple représentées sous forme de diagrammes.

Exemples:

1) Température de l’air durant une journée

La mesure a été effectuée à minuit, à des intervalles de 2h, et a donné le tableau suivant:

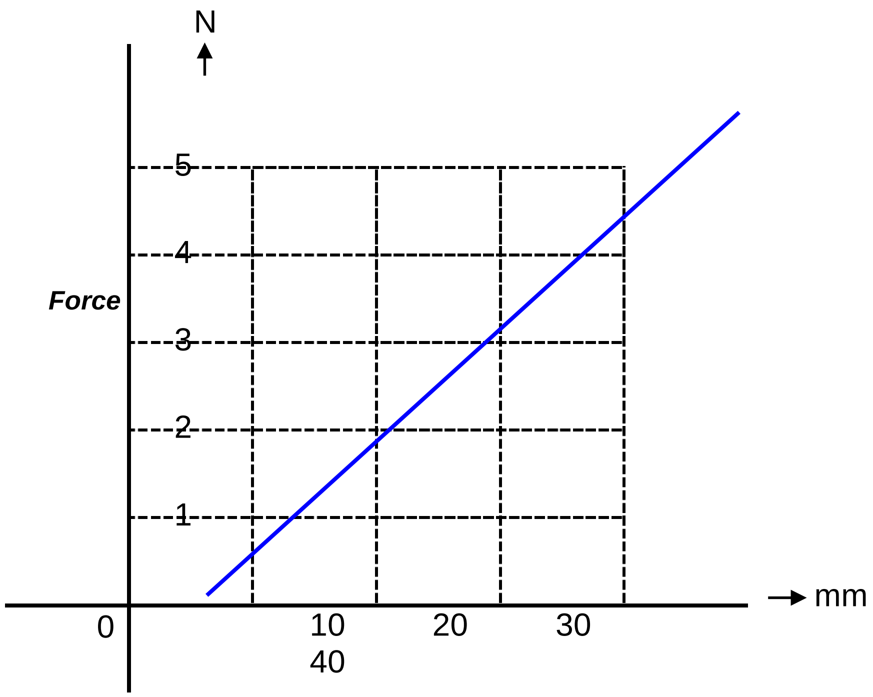
h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
°C	4,8	3,6	3,0	4,8	7,0	9,5	11,2	12,4	11,0	8,0	7,5	6,3	5,7



2) Courbe caractéristique d'un ressort

Un ressort hélicoïdal est soumis à différentes forces de traction F. Les allongements s qui en résultent sont reportés dans un tableau:

s (in mm)	0	8	16	24	32	40
F (in N)	0	1	2	3	4	5



On voit très bien que cette fonction est linéaire, la loi de Hook s'applique donc ici:

$F = k * x$ p. ex.: $F = 4N$; $x = 32mm$; $k = ?$

k = = = <u>0,125N/mm</u>

k = constante du ressort
x = déformation du ressort
F = force du ressort

(σ = E * ε = La loi de Hook dans la résistance des matériaux

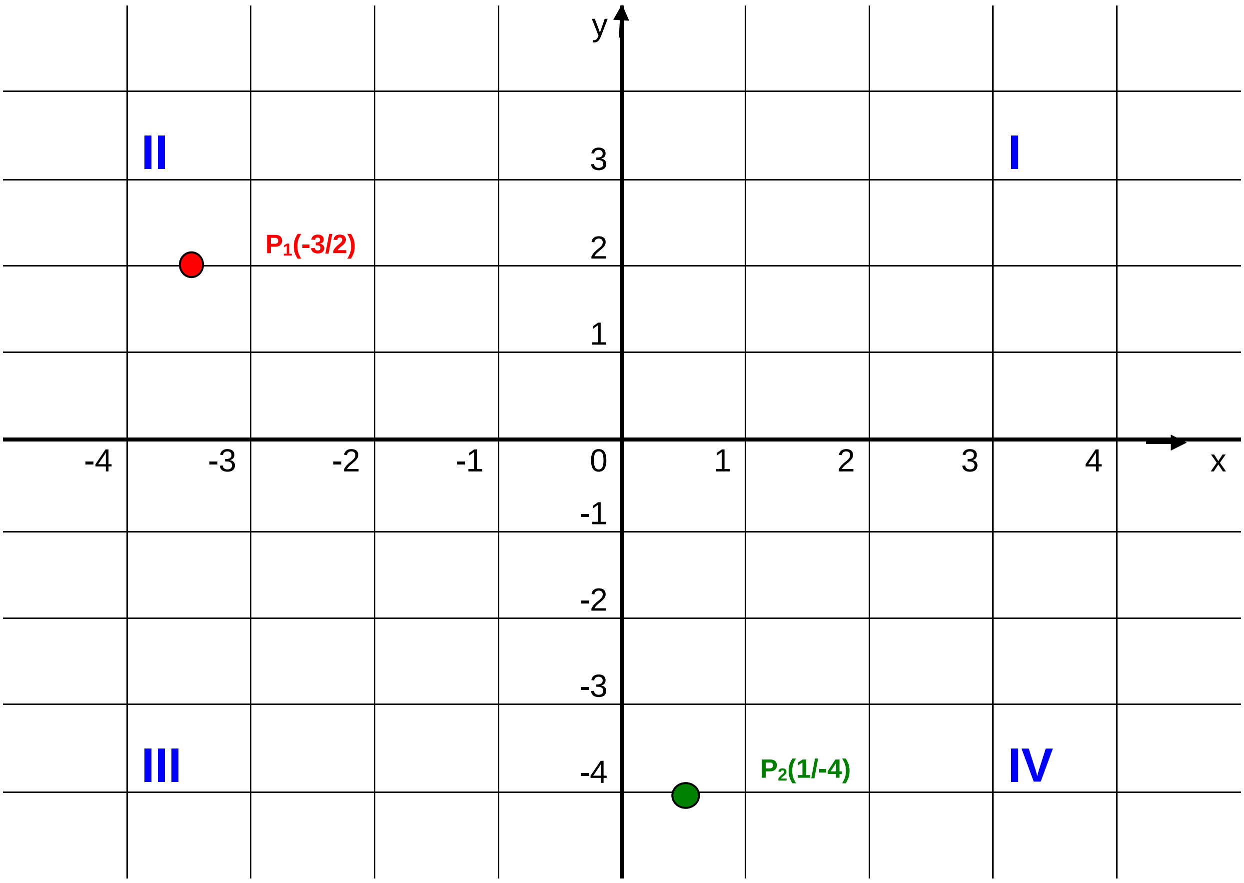
σ = Contrainte de traction en N/mm^2
E = Constante d'élasticité en N/mm^2
ε = Allongement = $\Delta\ell/\ell$)

2.2 Systèmes de coordonnées

Les systèmes de coordonnées ont pour tâche de décrire avec précision la position d'un point ou la courbe d'une fonction. On utilise généralement pour cela, le système de coordonnées cartésiennes ou le système de coordonnées polaires.

2.2.1 Système de coordonnées cartésiennes

Il se compose de deux droites numériques perpendiculaires l'une à l'autre, dont le point zéro est commun.



- l'axe horizontal se nomme l'axe des abscisses ou l'axe des x
- l'axe vertical se nomme l'axe des ordonées ou axe des y

Un point peut être défini de manière univoque par le système de coordonnées.

Soit: P(x/y)

Pour les 2 points ci-dessus, on trouve:

P_1(-3/2), P_2(1/-4)

Le croisement des axes divise le plan en quatre cases, les quadrants:

- Ils sont désignés par les chiffres romains I, II, III, IV.
- Le signe des coordonnées détermine dans quel quadrant se trouve le point.

Valeurs de x et y, avec les quadrants correspondants:

Quadrant	Abscisse X	Ordonnée Y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Le système de coordonnées cartésiennes fait partie des systèmes de coordonnées parallèles et possède des coordonnées parallèles à angle droit. Par ailleurs, il existe également des systèmes de coordonnées à angle oblique.

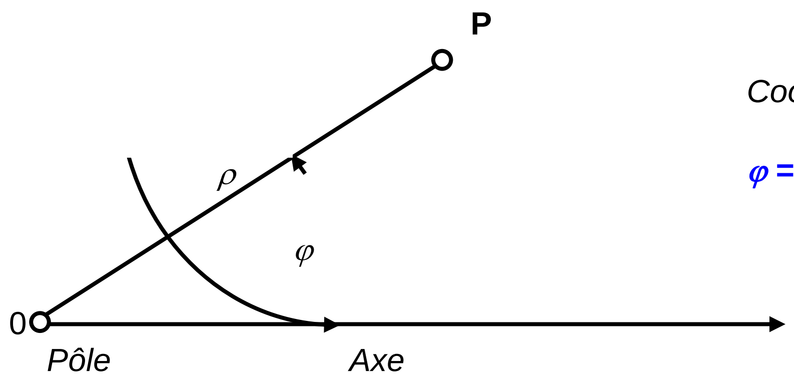
- Les relations fonctionnelles peuvent être illustrées graphiquement par des courbes et représentées dans un système de coordonnées.
- Par courbe, on entend l'image géométrique d'une fonction.

2.2.2 Coordonnées polaires

Un système de coordonnées polaires est déterminé par un point fixe 0, le *point de départ* ou *pôle*, et par une *direction zéro* ou un *axe* partant de lui, sur lequel des longueurs positives peuvent être reportées et mesurées comme sur un rayon numérique.

Un point quelconque P de la surface peut donc être déterminé comme suit:

- l'angle φ selon lequel le rayon numérique doit être tourné dans le sens mathématique positif jusqu'à ce qu'il passe par le point P
- la distance positive ρ du point P de 0



Coordonnées polaires du point P

φ = 34° und ρ = 6,4   (1 ≙ =1cm)

2.3 Fonctions du 1er degré

2.3.1 Généralités

Contrairement aux courbes empiriques qui se basent sur des mesures, des observations ou des expériences, il existe des relations fonctionnelles qui sont établies par des chiffres (équations). Il s'agit de fonctions mathématiques qui sont spécifiées au moyen d'équations fonctionnelles.

Les variables x et y sont souvent utilisées dans ces équations fonctionnelles, y étant généralement dépendant de x.

On parle alors de: **y est une fonction de x**

Il s'applique: $y = f(x)$

Une fonction peut être: $y = 2x + 3$

variable dépendante **variable indépendante**

2.3.2 Tableaux de valeurs

La fonction est plus parlante si on la représente dans un système de coordonnées, mais pour cela il faut d'abord créer un tableau de valeurs (voir exemples).

(On obtient le tableau de valeurs en insérant des valeurs quelconques pour x et en calculant ensuite les valeurs y correspondantes. Les valeurs x/y sont reportées sous forme de points dans le système de coordonnées et reliés entre eux. Plus il y a de points, plus la représentation graphique de la fonction sera précise.)

2.3.3 Fonctions linéaires et tableaux de valeurs

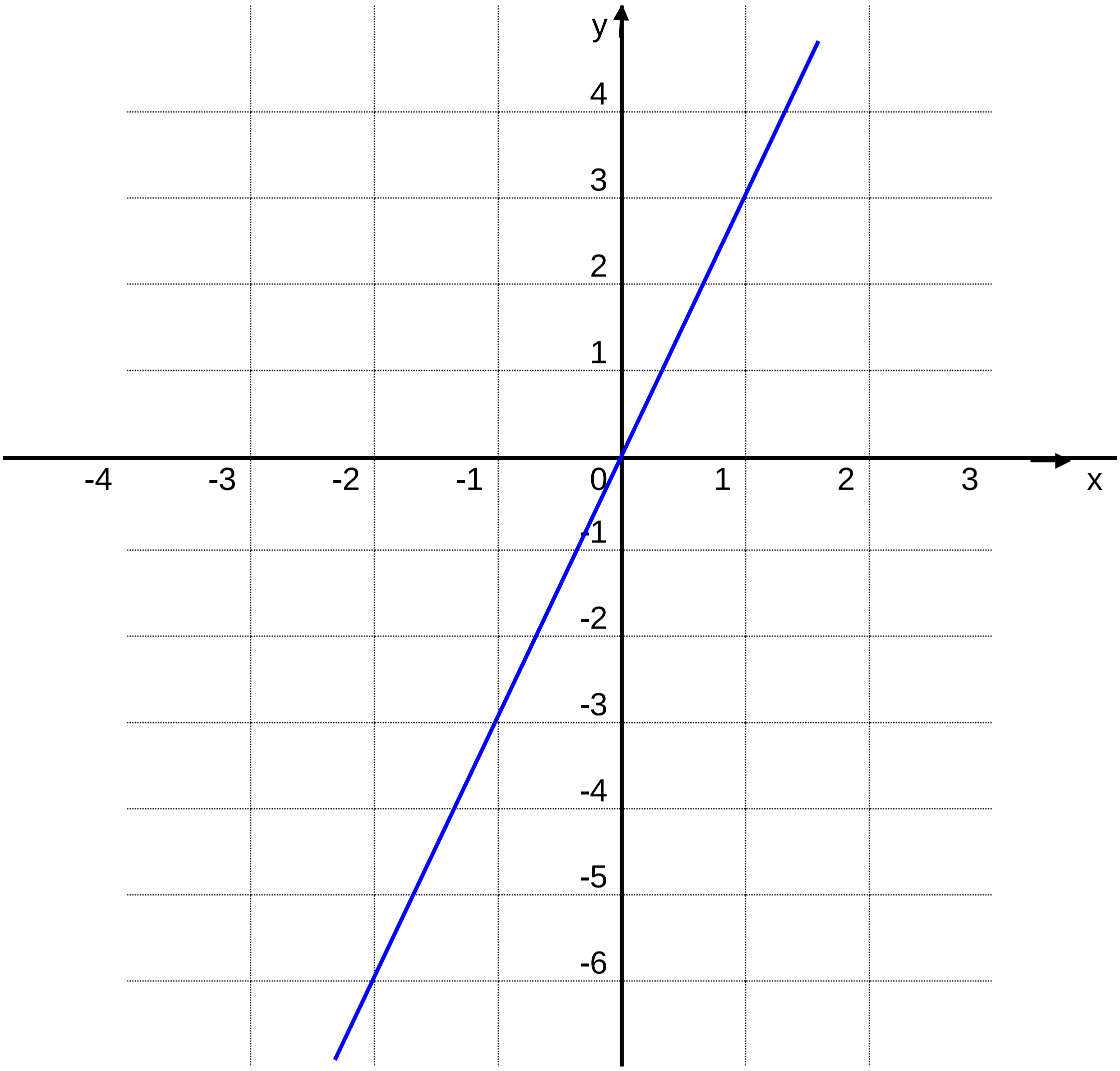
Une fonction linéaire ou souvent appelée fonction du 1er degré, est une droite.

Exemples:

1) Créé pour l'équation $y=3x$ un tableau des valeurs et représente-les ensuite graphiquement.

Tableau des valeurs:

x	y



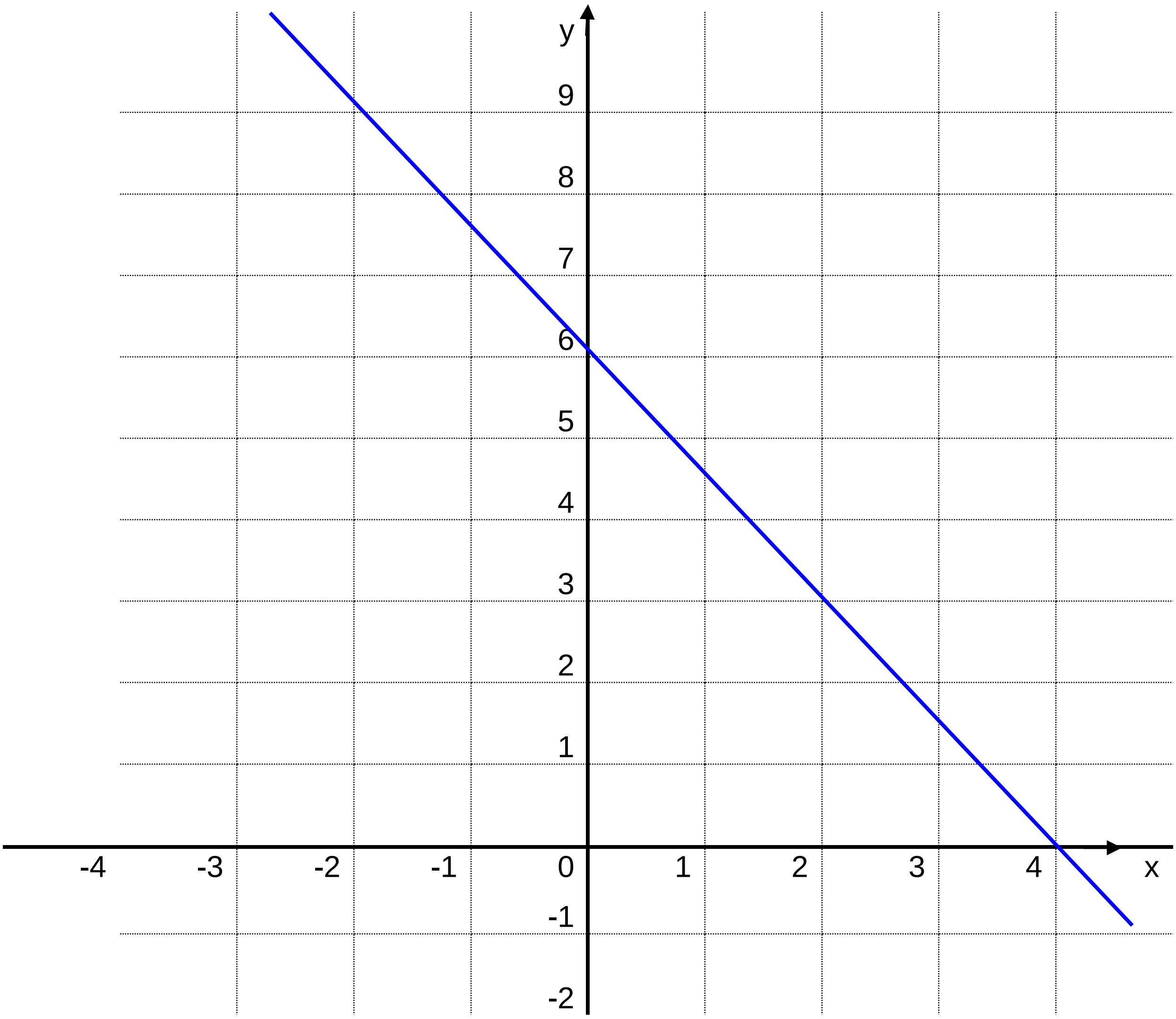
<u>Remarque</u>:

Toute équation de type $y = mx$ représente une droite qui passe par le point zéro avec une inclinaison m.

2) Représente l'équation $3x + 2y = 12$ sous forme de graphique dans le système de coordonnées.

Tableau des valeurs:

x	y

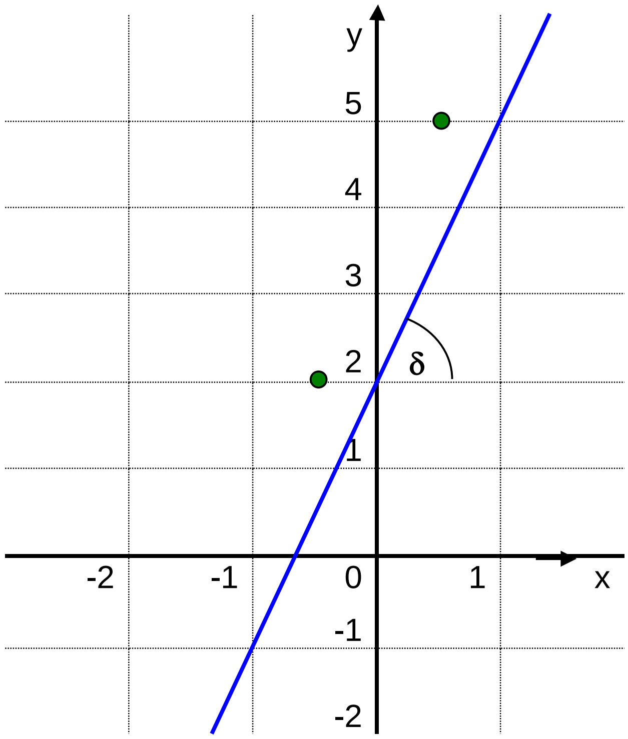


Remarque:

Toute équation de type $y = mx + b$ représente une droite qui peut se trouver n'importe où dans le système de coordonnées.

b est l'ordonnée à l'origine.

3) Observe la figure suivante et déduis-en l’équation fonctionnelle.



Solution:

1. Droite: **$y = mx + b$ ⇒ m et b doivent être déterminés!**

2. b: **la droite coupe l'axe des y en y = 2 ⇒ $b = 2$**

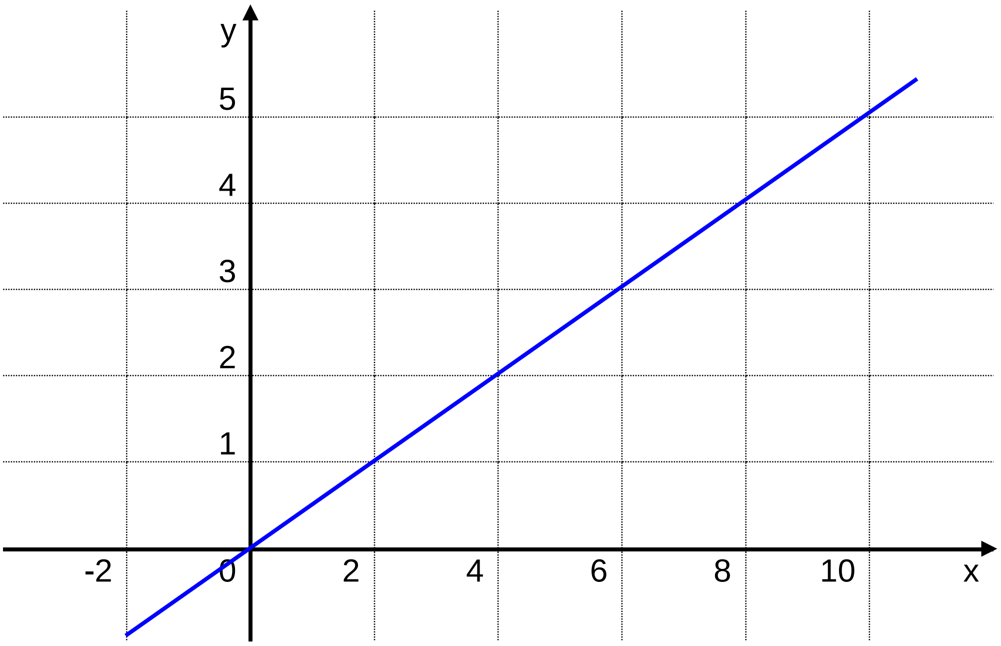
3. Inclinaison: **la ligne droite monte ⇒ m est donc positive**

$\tan(\delta)^{*)} = \Delta y / \Delta x = 3/1$ ⇒ $m = 3$

4. Équation: **$y = 3x + 2$**

*) $\tan(\delta) = \quad = m$

4) On connaît les points $P_1(4/2)$ et $P_2(10/5)$ d'une droite. Trace la droite et détermine l'équation fonctionnelle.



Solution:

1. Droite: ***y* = *mx***

2. Inclinaison: **la ligne droite monte ⇒ *m* est positive**

tanδ = = ⇒ *m* =

3. Équation: ***y* = *x***

Exercice: *représentation graphique de fonctions linéaires*

5. Tracez les équations fonctionnelles suivantes dans un système de coordonnées:

a) $y = \frac{1}{3}x$ **b)** $y = x$ **c)** $y = 3x$ **d)** $y = -2x$

e) $y = -\frac{2}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{5}x$ **g)** $y = -\frac{x}{2}$ **h)** $y = \frac{x}{3}$

6. Tracez les équations fonctionnelles suivantes en vous servant d'un tableau de valeurs:

a) $y = x - 5$ **b)** $y = 2x + 4$ **c)** $y = 4x - 6$ **d)** $y = \frac{x}{2} - 2$

e) $y = \frac{2x}{3} + 3$ **f)** $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ **g)** $y = -2x - 1$ **h)** $y = -3x - 2$

i) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}$ **k)** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$ **l)** $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{4}$ **m)** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$

7. Tracez les droites suivantes, dont on connaît deux points, puis déterminez:

1. le facteur d'inclinaison *m*,
2. l'équation fonctionnelle

a) $P_1(8 \mid 4)$, $P_2(10 \mid 5)$ **b)** $P_1\left(2 \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$, $P_2\left(5 \,\middle|\, 1\frac{2}{3}\right)$ **c)** $P_1(1 \mid 3)$, $P_2(2 \mid 6)$ **d)** $P_1(3 \mid -6)$, $P_2(-2 \mid 4)$

8. Tracez les droites suivantes, dont on connaît deux points, puis déterminez:

1. le facteur d'inclinaison *m*,
2. l'intersection avec l'axe des y,
3. l'équation fonctionnelle,

a) $P_1(3 \mid 4)$, $P_2(7 \mid -1)$ **b)** $P_1(-8 \mid 1)$, $P_2(2 \mid -3)$ **c)** $P_1(4 \mid 3)$, $P_2(-7 \mid -1)$ **d)** $P_1(6 \mid 2)$, $P_2(-3 \mid -2)$

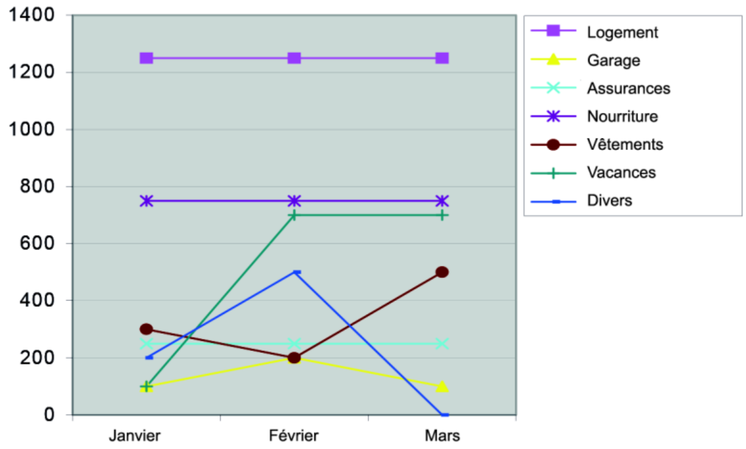
Devoirs: **Kusch 1; pages 300/301**
Exercices série 1: 5a, 5d, 6c, 6e, 6l, 7a, 7b, 8a, 8c
Exercises -série 2: 5c, 5e, 6a, 6f, 7c, 8b

Diagrammes

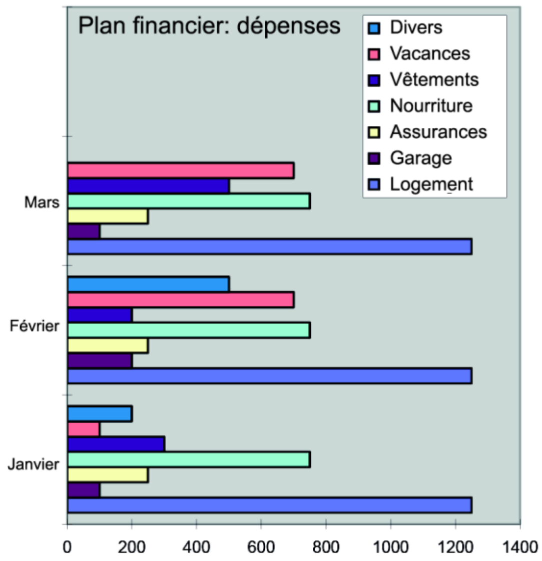
Le tableau ci-contre peut être représenté graphiquement de différentes façons (graphique linéaire, diagramme en bâtons, diagramme circulaire ou camembert, …).

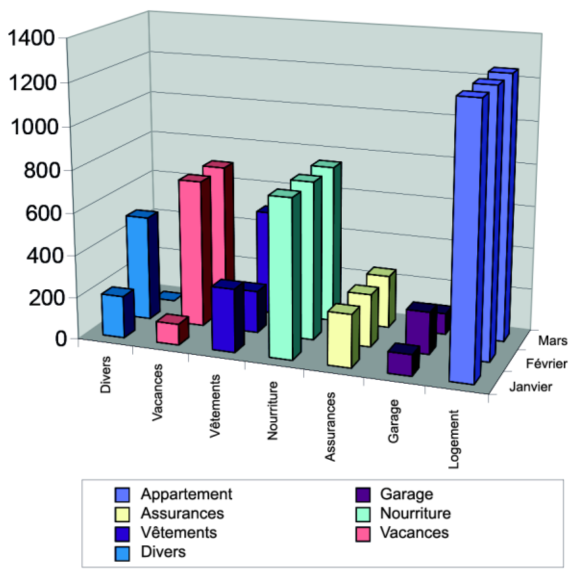
	Dépenses par mois en CHF.		
	Janvier	Février	Mars
Logement	1250	1250	1250
Garage	100	200	100
Assurances	250	250	250
Nourriture	750	750	750
Vêtements	300	200	500
Vacances	100	700	700
Divers	200	500	0

➢ Graphique linéaire



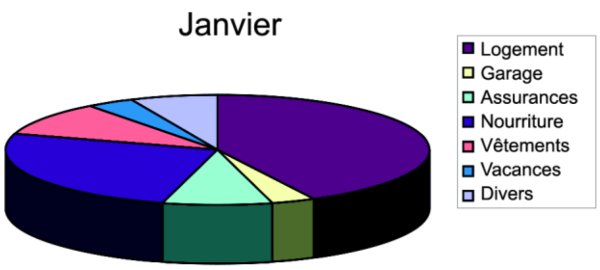
➢ Diagramme en bâtons

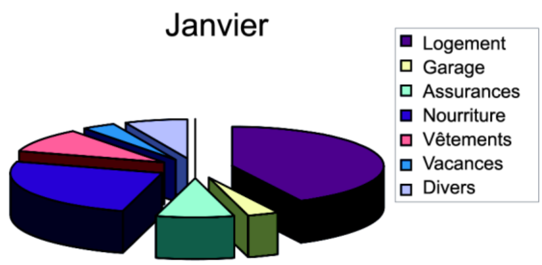




➢ Diagramme circulaire

3





quations I

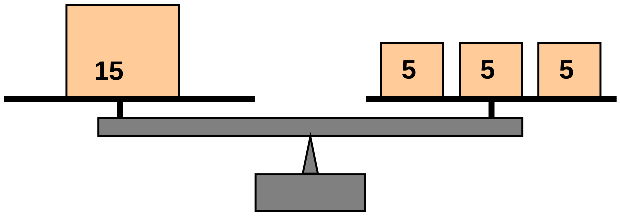
3.1 Équations à une variable

3.1.1 Équations numériques

Les équations numériques à une variable sont des équations de détermination dans lesquelles un seul type de variables, par exemple la variable *x,* apparaît:

$x + 5 = 21$
$6x = 18$
$x - 26 = 7x - 22$

Une équation peut être comparée à une balance en équilibre:



15 = 3 * 5

Remarque:

- Les équations universelles sont des affirmations vraies en raison des lois de calcul.
- Une équation reste une affirmation vraie si l'on modifie les deux côtés de la même manière, c'est-à-dire que l'on peut ajouter ou soustraire le même nombre des deux côtés, le multiplier par le même nombre ou le diviser par le même nombre. (Exception: on ne peut pas diviser par zéro).
- Si un nombre qui est soustrait doit être éliminé d'un côté d'une équation, il faut ajouter le même nombre des deux côtés de l'équation.
- Si un nombre qui est additionné doit être éliminé d'un côté d'une équation, il faut soustraire le même nombre des deux côtés de l'équation.
- Un facteur d'une équation est éliminé, en divisant les deux côtés de l'équation par le même nombre.
- Un diviseur d'une équation est éliminé, en multipliant les deux côtés de l'équation par le même nombre.
- On peut intervertir les deux côtés d'une équation.
- Une équation doit toujours être transformée jusqu'à ce que x soit seul à gauche avec un signe positif.
- S'il y a des parenthèses dans une équation, il faut les calculer en premier lieu.

3.1.1.1 Exercice: équations numériques

1. $x - 3 = 4$
2. $x - 9 = 1$
3. $x - 0{,}5 = 2{,}5$
4. $x - 3\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$
5. $x - 9\frac{2}{3} = 4\frac{1}{5}$
6. $x + 21 = 39$
7. $x + 44 = 79$
8. $x + 7{,}5 = 12{,}5$
9. $x + 1{,}25 = 3{,}75$
10. $x + 2\frac{1}{2} = 3\frac{2}{5}$
11. $x + 17 = 15$
12. $x + 1{,}2 = 1$
13. $x + 13\frac{1}{2} = 5$
14. $1{,}5x = 12$
15. $7{,}25x = 29$
16. $0{,}8x = 1{,}6$
17. $2x = \frac{1}{2}$
18. $5x = \frac{5}{7}$
19. $0{,}3x = \frac{3}{10}$

20. $1{,}25x = \frac{5}{9}$
21. $\frac{x}{4} = 5$
22. $\frac{x}{7} = 8$
23. $\frac{x}{0{,}5} = 20$
24. $\frac{x}{2{,}7} = 5{,}2$
25. $\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$
26. $\frac{x}{5} = 6\frac{2}{15}$
27. $\frac{x}{\frac{1}{2}} = 4\frac{2}{3}$
28. $\frac{x}{3\frac{2}{5}} = 4\frac{7}{17}$
29. $30 = x - 6$
30. $5\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} + x$
31. $\frac{4}{5} = 8x$
32. $3\frac{3}{5} = 2\frac{1}{2}x$

33. $4\frac{2}{3} = 1\frac{3}{7}x$
34. $2{,}5 = \frac{x}{4}$
35. $3\frac{1}{2} = \frac{x}{0{,}5}$
36. $4\frac{1}{5} = \frac{x}{3\frac{5}{7}}$
37. $\frac{10}{x} = 5$
38. $\frac{4{,}5}{x} = 1{,}5$
39. $\frac{5}{x} = \frac{3}{14}$
40. $\frac{13}{x} = 5\frac{1}{5}$
41. $\frac{20}{x} = 3\frac{1}{3}$
42. $\frac{5{,}4}{x} = 1\frac{4}{5}$
43. $\frac{99}{55} = \frac{72}{x}$
44. $\frac{6}{14} = \frac{72}{x}$

45. $3x + 2x - x = 12$
46. $8x + 43 = 5x + 76$
47. $\frac{6}{x} + 5 = 41$
48. $\frac{15}{x} - 3\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
49. $7{,}1x - 12{,}79 = 5{,}8 - 4{,}8x - 2{,}4x$
50. $\frac{1}{3}x = 2\frac{2}{3} - \frac{x}{2}$
51. $3x + 11\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}x = x + 19{,}5 - \frac{x}{2}$
52. $4a + 2x = 5a$
53. $x - 2\frac{1}{4}c = 4\frac{1}{2}c$
54. $5b + 2x = 3a$
55. $11x + 7 - 5a = 4x + 9 + 3a$
56. $\frac{1}{4}x + 2a = 3a - \frac{1}{2}x$
57. $\frac{x}{2} + 2\frac{1}{4}b = 4\frac{1}{2}b$
58. $0{,}6a - \frac{3}{10}x = 0{,}8a - \frac{2}{5}x$
59. $0{,}76 - 8{,}7x - 2{,}1x = 0{,}28$

60. $\frac{1}{2}x = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$
61. $7{,}4 = 14{,}4x - 9{,}4 - 3{,}2x$
62. $\frac{6}{16}x + \frac{5}{12}x - 2{,}4 = \frac{8}{5} - \frac{5}{24}x$
63. $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2}x$
64. $\frac{3}{5}x + 4 = 25$

65. $2{,}1x + 18{,}4 = 5{,}7x - 3{,}2$
66. $x + 4x - 24 = 9x - 22 - 3x$
67. $5b + 2x = 4a$
68. $x - 4\frac{1}{2}b = 2\frac{1}{4}b$
69. $11 = \frac{12 - x}{a}$
70. $15x + 98 + 72a - 36b = 25x + 72a - 36b - 2$
71. $12x + 7 - 5a = 4x + 9 + 3a$

Résolvez les formules suivantes en fonction des grandeurs demandées :

72. $A = \frac{a \cdot b}{2}$
$a = \frac{2 \cdot A}{b}$
$b = \frac{2 \cdot A}{a}$

73. $U = d \cdot \pi$
$d = ?$

74. $A = a \cdot b$
$b = ?$

75. $M = d \cdot \pi \cdot h$
$d = ?;\ h = ?$

76. $V = \frac{A \cdot h}{3}$
$A = ?;\ h = ?$

77. $n_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot d_2$
$n_2 = ?;\ d_2 = ?$
$d_1 = ?;\ n_1 = ?$

78. $F \cdot a = Q \cdot b$
$F = ?;\ Q = ?$
$a = ?;\ b = ?$

79. $M = \frac{d \cdot \pi \cdot s}{2}$
$d = ?;\ s = ?$

80. $P = \frac{F \cdot r \cdot \pi \cdot n}{75 \cdot 30}$
$F = ?;\ r = ?$
$n = ?$

81. $Z = \frac{p \cdot K \cdot J}{100}$
$p = ?;\ K = ?$

82. $A = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot b$
$a_1 = ?;\ a_2 = ?;\ b = ?$

83. $V = \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot h$
$A_1 = ?;\ h = ?$

84. $M = \frac{D + d}{2} \cdot \pi \cdot s$
$D = ?;\ d = ?;\ s = ?$

85. $P = \frac{1{,}73 \cdot U \cdot I \cdot 0{,}7}{1000}$
$U = ?;\ I = ?$

86. $Pe = \frac{2\pi \cdot Q \cdot l \cdot n}{60 \cdot 75}$
$Q = ?;\ l = ?;\ n = ?$

Devoirs: **Kusch 1 / pages 217/218 exercises: 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81**

Exercice: *équations numériques avec parenthèses*

1. $3x + 30 - (x + 28) = 3x - (2x + 4)$
2. $3x + 12 - (12x + 18) = -2x + 36$
3. $9x - [4x - (4 + x)] = 4x + 8$
4. $7x - [8x - (5x - 30)] = 12$
5. $5 - [7x - (5x - 30)] = -125$
6. $5 - 5x - (10 - 6x) = 5$
7. $11 = (24 - x) - (19 - 2x)$
8. $45 - 9x = 33 + 15x - (15 - 3x)$
9. $25x - (19x - 48) = 18x - (36 - 13) - (66 - 5x)$
10. $16x + 19 - (28 + 127) = 24 - (5x + 13 + 14x)$
11. $x - (a - 2b) = 2b - (x + 3a)$
12. $3x - [5x - (105 - 30x) - 35] = 12$
13. $47 - (8x - 17) = 38x - [5 - 7x - (25 - 4x)]$
14. $19{,}3x - 5{,}4 - [15{,}6 - (5{,}2x + 20{,}1)] = 7{,}3x - (17{,}8x + 1{,}6)$

devoirs: **Kusch 1 / page 218 exercises: 5, 10**

Exercice: *équations numériques avec produits*

1. $12(x - 1) = 64 - 14(x - 2)$
2. $9(3x - 11) = 6(3x - 10)$
3. $5(8x + 1) + 13x = 6(9x - 4)$
4. $8(x + 3) + 7(x + 2) = 5x + 6(x + 1)$
5. $8(3{,}6x - 2) - 21{,}42 = 3{,}1(7x - 5{,}2)$
6. $5{,}5x - 3(x - 3) = 1{,}5(9 - x) + 23{,}5$
7. $-x + 2(x + 9) = 7x - 4(x + 0{,}5)$
8. $18(15x - 28) - 8(42 - x) = 14x - 9(512 - 20x)$
9. $5x + 6(x + 1) = 8(x + 3) + 7(x + 2)$
10. $2[3x + 2(3x - 2)] = 4(4x - 1)$
11. $9(5x - 24) - [4(42 - x) - 9(256 - 10x)] = 7x$
12. $2(x - 28) - [6(18 - 2x) - 4(8x + 12)] = 8[5x - (3x - 8)]$
13. $30x - [15(x - 2) - 6(3x + 1) + 10(x + 1) + 6(2 + x)] = 150$
14. $9(10x - 48) - 4(84 - 2x) = 14x - 18(256 - 10x)$
15. $2(10x + 48) - 3(2x - 15) = 4(2x - 30) + 5(3x + 10) + 3(4x - 5) + 37$
16. $\frac{8}{3}\left(6x - \frac{9}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(8x + \frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5}\left(10x - \frac{5}{8}\right) + 3\frac{1}{2}$
17. $24(3x + 2) = 12(2x + 5) - 2[3(2x - 7) - 9(4x - 1)]$
18. $50 - 2[2(x - 6) + 4(x + 9)] = 6[4x - (x + 8)]$
19. $10[16 - 3(2x - 3) + 3x] - 42(x - 7) = 8[2(3x - 1) - 4(x + 5) + 13]$
20. $(5 + 4b)(3x - 6) = (6x - 7)(2b + 10)$

devoirs: **Kusch 1 / pages 222/223 exercises: 10, 15, 20**

3.1.1.2 Exercice: *équations numériques avec fractions*

19. $\frac{5x}{4}+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}+\frac{5}{2}$

20. $\frac{x}{18}+\frac{x}{3}=\frac{x}{9}+50$

21. $\frac{4x}{3}+\frac{2x}{5}=2x-4$

22. $\frac{18-2x}{4}+3x=\frac{8x}{3}+x+1$

23. $\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{3x}{5}-\frac{3x}{4}-\frac{5}{3}$

24. $\frac{0{,}975x-1{,}5}{4}+1{,}3x=20{,}28+0{,}97x$

25. $\frac{8x-22}{4}-20=\frac{5(x-7)}{2}-8$

26. $\frac{5}{2}+\frac{8x-7}{6}=3-\frac{14x+3}{10}$

27. $2x-2-\frac{2x-4}{2}+\frac{2x-6}{3}=0$

28. $\frac{7}{2}-\frac{x}{2}-\frac{2x+3}{9}=3-\frac{5x+1}{8}$

29. $\frac{2x-5}{3}+\frac{6x+3}{2}=10x-35$

30. $\frac{3}{2}(x+3)-(x-2)=\frac{1}{4}(3x-5)+\frac{3}{4}$

40. $\frac{10x-6}{7}-\frac{18-2x}{3}=5x+\frac{19}{3}(x-4)$

41. $\frac{2x-0{,}2}{5}+\frac{4x+0{,}6}{3}=4x-1{,}2$

42. $\frac{2x+3}{4}=\frac{2(x-1)}{6}$

43. $1+\frac{2(x-3)}{4}=\frac{x-2}{3}$

44. $\frac{1}{6}(2x-57)-\frac{5}{3}=x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)$

45. $1=\frac{x-2}{10}-\frac{2x-14}{10}$

46. $3-\frac{2x-3}{4}=\frac{8x-11}{12}$

47. $2x=\frac{12x+14}{12}-\frac{2x+8}{16}$

48. $\frac{2x+8}{28}+\frac{x-4}{6}=2$

49. $\frac{14}{15}-\frac{4x-6}{10}=\frac{6x-8}{30}$

50. $\frac{2x+10}{8}-\frac{x+3}{20}=\frac{4x+9}{10}-\frac{14x-2}{50}$

51. $\frac{6x-10}{0{,}25}+10-\frac{8x-2}{4{,}5}=\frac{2x+0{,}4}{0{,}15}$

59. $\frac{3}{5x}+\frac{9}{10x}=\frac{13}{8x}-\frac{1}{8}$

60. $\frac{x-2ab}{2ab}+\frac{x-2b}{2b}=\frac{2}{a}$

61. $\frac{2x+4a}{a}+\frac{4(a+b)}{ab}=\frac{4b+2x}{b}+\frac{4x}{a}$

62. $\frac{4}{x-3}=2$

63. $\frac{4}{2x}=\frac{1}{x-1}$

64. $\frac{3x}{25-x}=2$

65. $\frac{4}{x+1}=\frac{10}{x+4}$

66. $\frac{1}{2x-3}+\frac{2}{6x-9}=\frac{5}{5x-2}$

67. $\frac{6}{b+x}-\frac{4}{2b+x}=\frac{3}{b+x}$

68. $\frac{6}{x+2}+\frac{1}{2x-6}-\frac{5}{6x-18}=\frac{4}{x+2}$

69. $\frac{4}{x+1}=\frac{7}{4x+4}+\frac{3}{2x-2}$

70. $\frac{2a}{x+1}+b=\frac{2b}{x+1}+a$

75. $\frac{1{,}5}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{4{,}5}{(x-2)(x+2)}$

76. $\frac{8}{2x-4}+\frac{12}{x+2}=\frac{32}{(x+2)(x-2)}$

77. $\frac{x+15}{m+1}-\frac{x-6}{m-1}=\frac{7m-9}{(m+1)(m-1)}$

78. $\dfrac{\frac{3x-3}{5}}{\frac{13x+3}{7}}=\frac{1}{5}$

79. $\dfrac{\frac{4(x-4)}{5}}{\frac{3(3x+5)}{4}}=\frac{1}{6}$

80. $\dfrac{10}{\frac{1}{5}+\frac{1}{x}}=48$

81. $\dfrac{\frac{4(4x-1)}{3}}{\frac{3(5x+1)}{2}}=\frac{4}{3}$

82. $\dfrac{\frac{2}{a}-\frac{2}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$

devoirs: **Kusch 1 / pages 225/226 exercises: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80**

Exercice: *équations numériques avec puissances*

1. $\frac{2x}{1-x}-\frac{2}{x-1}=\frac{2x^2-6}{1-x^2}-\frac{8}{x+1}$

2. $\frac{14-3x}{2x+4}-\frac{7}{6}=\frac{x^2-6x+2}{4-x^2}+\frac{5x}{6-3x}$

3. $\frac{2x^2-6}{1-x^2}+\frac{2x+2}{x-1}=\frac{16}{2x+2}$

4. $\frac{16}{2x+4}+\frac{14}{x+3}=\frac{74}{x^2+5x+6}$

5. $cx-dx=c^2-2cd+d^2$

6. $2ax-6cx=2a^2-12ac+18c^2$

7. $mx-2mn=m^2-nx+n^2$

8. $ab+a-c=ax-cx+bc$

9. $4a-\frac{2ab}{x}=\frac{2a^2}{x}$

10. $\frac{2x}{c}+\frac{2x}{d}=2c+2d$

11. $a(x-b^2)=b(x-a^2)$

12. $\frac{a}{x}+n=\frac{a(b+n)}{bx}$

13. $\frac{c(x+a)}{a}-\frac{2a(x-c)}{c}=x+\frac{cx}{a}$

14. $(bx^2+cx-d)\,a=b(ax^2-cx+d)$

15. $\frac{a+n}{(x-n)\cdot x(a-x)}=\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{x-n}\right)\cdot\frac{1}{a-n}$

16. $\frac{x(c-a)}{d^2-x^2}=\frac{a+x}{d+x}+\frac{c+x}{d-x}$

17. $\frac{2b+6c}{4c+2x}-\frac{12c^2}{4c^2-x^2}=\frac{3c-9b}{6c-3x}$

18. $\frac{a-b}{x}=\frac{a^2-b^2}{ax+b}$

19. $(5cx+2b)^2-(3cx+4b)^2=(4cx-6b)^2$

20. $\frac{1{,}5x+2a}{0{,}5x+a}-\frac{1{,}5x^2+2ax-2a}{0{,}5x\,(x+2a)}=\frac{1}{1{,}5x}$

21. $\frac{1{,}5}{0{,}5x}-\frac{1}{0{,}5x}=\frac{6x+10}{2n+4m}-\frac{9x}{3n+6m}$

22. $\frac{2a^2}{2a-2b}-\frac{4x}{2a+2b}=\frac{4a^2b-2ab^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2+x}{a+b}$

23. $\frac{cx+2c^2}{a}+\frac{6b^2}{c}=\frac{(2b+c)\,0{,}5x}{0{,}5c}+\frac{b(a^2-b^2)}{(a-b)\,(a+b)}+2c+\frac{3bc}{a}$

24. $\frac{c+x}{x(a-b)}-\frac{x-b}{x(a+b)}=\frac{1}{x}+\frac{2a}{a^2-b^2}$

25. $\frac{2x^2}{c+x}+\frac{(b+c)^2}{c+x}=\frac{x(b+x)}{c+x}+x$

26. $\frac{x}{(x-c)\,(d-b)}+\frac{d+b}{x(x-c)}=\frac{x-b}{x\,(d-b)}+\frac{c\,(b+c)+d^2}{x(x-c)\,(d-b)}$

27. $\frac{12x+2c-6b}{8x+8b+6c}=\frac{9x-9b+12c}{6x+12b+15c}$

28. $\frac{x-3c^2}{2b}+\frac{2b^2}{x}=\frac{c(15c^2+13b^2)}{2bx}-\frac{c}{x}(11c+x)+\frac{x+b^2}{2b}$

29. $\frac{10a-35b}{6x^2-x-1}=\frac{6a-10b}{4x-2}-\frac{2a-1{,}5b}{1{,}5x+0{,}5}$

30. $\frac{(2x+2a)\,(a-x)}{(a+3x)\,(2x-a)}=\frac{2x-4a}{2x-a}-\frac{8x-4a}{2a+6x}$

31. $\frac{(2x+6a)\,(x+9b)-2a^2}{(3b+x)\,(x-a)}=\frac{2b+6x}{x-a}-\frac{8x-4a}{6b+2x}$

32. $\frac{3dx+2cd+2d^2-2c^2+7x^2-(c-d)\,(3x-d)}{2x^2+dx-2cx-cd}=\frac{6x-2c+4d}{2x-2c}+\frac{x+c-2d}{d+2x}$

devoirs: **Kusch 1 / pages 229/230 exercises: 10, 20, 30**

3.1.2 Équations de texte

Si la dépendance entre des nombres et des grandeurs est exprimée en mots, alors le texte doit d'abord être traduit en „langage des signes“ mathématiques. Cette trancription est appelée construire ou poser des équations.

Comme la technique et la nature ne nous proposent presque que des tâches sous forme de texte, cette branche des mathématiques est très importante.

Exemples:

1) En multipliant la troisième partie d'un nombre de vis par 7 et en soustrayant 9, on obtient 145. Combien de vis y a-t-il ?

   x → nombre de vis

   Équation:

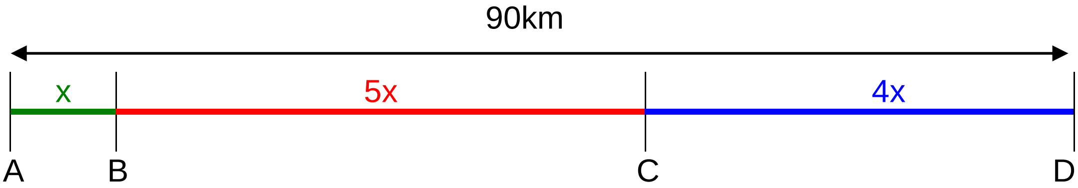
   $\frac{x}{3} * 7 - 9 = 145 \qquad +9$

   $\frac{7x}{3} = 154 \qquad *3$

   $7x = 462 \qquad /7$

   $\underline{\underline{x = 66}}$

2) La distance de A à D en passant par B et C est de 90 km.
   B est cinq fois plus éloigné de C que B de A.
   C est quatre fois plus éloigné de D que A de B.
   Quelle est la distance entre A et B?



   x km → distance de A à B
   5x km → distance de B à C
   4x km → distance de C à D

   x km + 5x km + 4x km = 90 km

   Équation:

   $x + 5x + 4x = 90\ \text{km}$

   $10x = 90 \qquad /10$

   $x = 9 \qquad \Rightarrow$ **distance** ***Erreur ! Il n'est pas possible de créer des objets en éditant les fonctions de champ.*** **= $\underline{\underline{9\text{km}}}$**

Exercice: *équations de texte*

5. Von welcher Zahl muß man 1,3 subtrahieren, um —2,9 zu erhalten?

6. Von welcher Zahl muß man $2\frac{1}{5}$ subtrahieren, um $3\frac{1}{3}$ zu erhalten?

7. Wenn man zur Höhe eines Turmes 17,2 m addiert, so erhält man 95,4 m. Wie hoch ist der Turm?

8. Subtrahiert man von der Länge einer Straße 14,75 km, so erhält man 135,71 km. Wie lang ist die Straße?

9. Subtrahiert man vom Gewicht einer Kiste $11\frac{1}{5}$ kg, so erhält man 1,5 kg. Wieviel kg wiegt die Kiste?

10. Multipliziert man eine Zahl mit 12 und subtrahiert davon 24, so erhält man 108. Wie heißt die Zahl?

11. Wenn man eine Zahl mit 6 multipliziert und zum Ergebnis 14 addiert, so erhält man 200. Wie heißt die Zahl?

12. Das $3\frac{1}{2}$fache einer Zahl, vermehrt um $9\frac{1}{5}$, ergibt 30,2. Wie heißt die Zahl?

13. Teilt man eine Zahl durch 13 und addiert zum Quotienten 9,2, so erhält man 11,7. Wie heißt die Zahl?

14. Teilt man das Gewicht eines Kraftwagens durch 30 und subtrahiert vom Quotienten 12 kg, so erhält man 20 kg. Wieviel kg wiegt der Kraftwagen?

15. Teilt man eine Anzahl Äpfel durch 12 und addiert zum Quotienten 19,5, so erhält man 23. Wieviel Äpfel sind vorhanden?

16. Multipliziert man den fünften Teil einer Zahl mit 4, so erhält man 28. Wie heißt die Zahl?

17. Multipliziert man die halbe Höhe eines Baumes mit 12, so erhält man 162 m. Wie hoch ist der Baum?

18. Multipliziert man den vierten Teil einer Menge Nägel mit 2,5, so erhält man 160. Wieviel Nägel sind vorhanden?

19. Multipliziert man den fünften Teil einer Zahl mit 9 und subtrahiert 8, so erhält man 100. Wie heißt die Zahl?

20. Multipliziert man den siebten Teil einer Zahl mit 5 und addiert 45, so erhält man 150. Wie heißt die Zahl?

30. Zwei Arbeiter (*A* und *B*) fahren täglich mit dem Kraftwagen zur Arbeit. *A* legt in der Stunde durchschnittlich 54 km (= 0,9 km/min), *B* 72 km (= 1,2 km/min) zurück. Wieviel Minuten nach Aufbruch von Arbeiter *B* werden sie sich treffen, wenn Arbeiter *A* 7 min früher losfährt?

31. Ein Brückenpfeiler ist 24 m lang und wird in einen Fluß gestellt. Das Stück des Pfeilers, das im Erdboden versenkt ist, ist doppelt so lang, und das Stück, das aus dem Wasser herausragt, ist fünfmal so lang wie das Stück, das sich im Wasser befindet. Wie tief ist der Fluß?

32. Zwei Kraftwagen (*A* und *B*) fahren von Köln und Stuttgart (357 km) gleichzeitig einander entgegen. *A* legt in der Stunde durchschnittlich 115 km zurück, *B* 95 km. Nach wieviel Stunden Fahrt begegnen sie einander? Wie weit sind sie dann von Köln entfernt?

35. Eine Hausfrau kauft 1 kg Kartoffeln, 1 kg Äpfel und 1 kg Bohnen. Die Äpfel kosten achtmal und die Bohnen $3\frac{1}{2}$mal soviel wie die Kartoffeln. Im ganzen zahlt sie 5 DM. Wieviel DM kostet jede Sorte?

devoirs: **Kusch 1 / pages 219…222 exercises: 10, 20, 30, 35**

3.1.3 Exercice: équations de texte avec produits

1. Subtrahiert man vom Dreifachen einer Zahl 11 und multipliziert die Differenz mit 2, so erhält man das Neunfache der Zahl, vermindert um 33. Wie heißt die Zahl?

2. Addiert man zum dritten Teil einer Zahl 9 und multipliziert die Summe mit 6, so erhält man das Fünffache der Zahl, vermehrt um 45. Wie heißt die Zahl?

3. Subtrahiert man vom Sechsfachen einer Zahl 9 und multipliziert die Differenz mit $1\frac{2}{3}$, so erhält man das Doppelte der Zahl, vermehrt um 6 und die Summe multipliziert mit $6\frac{1}{2}$. Wie heißt die Zahl?

4. Das 13fache einer Zahl, vermindert um das Achtfache der um 1 verkleinerten Zahl, ergibt 23. Wie heißt die Zahl?

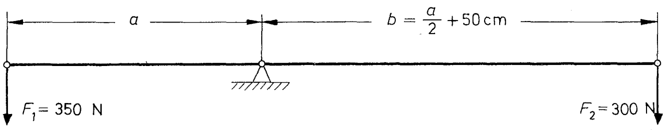
5. Addiert man zur Hälfte einer gesuchten Zahl das Fünffache der um 3 verkleinerten Zahl, so erhält man das Sechsfache der Zahl, vermindert um 10. Wie heißt die Zahl?

6. In einem Rechteck ist $a = 7$ cm. Verkürzt man a um 2 cm und verlängert b um 2 cm, so ist das neue Rechteck um 2 cm² kleiner. Wie lang ist die Seite b vom ersten Rechteck?

7. In einem Dreieck ist die Grundseite 5 cm und die Höhe 8 cm lang. Um wieviel cm muß man die Grundseite c verlängern, wenn man die Höhe um 2 cm verkürzt, damit der Flächeninhalt um 4 cm² größer werden soll?

8. Von einem Trapez sind bekannt: $A = 84$ cm²; $a = 14$ cm; $h = 8$ cm. Wie lang ist die andere parallele Seite c?

9. Wie lang sind die Hebelarme a und b?



10. Zwei Arbeiter A und B sollen eine 1000 N schwere Last mit einer 3,2 m langen Stange transportieren. In welcher Entfernung von B muß die Last an der Stange befestigt werden, wenn B nur 300 N tragen kann?

11. Eine Mutter von 42 Jahren hat eine 12jährige Tochter. In wieviel Jahren ist die Mutter dreimal so alt wie ihre Tochter?

12. Zwei Kraftwagen fahren einander entgegen. Der erste fährt um 9 Uhr vom Ort A ab und legt durchschnittlich 67,5 km/h zurück. Der zweite fährt 2 Stunden später vom Ort B ab und legt durchschnittlich 90 km/h zurück. Wann und in welcher Entfernung vom Ort B werden sie sich treffen? Die Orte A und B sind 450 km voneinander entfernt.

13. Ein Wasserbehälter faßt 30 l Wasser. Er ist innen 30 cm breit und 50 cm lang. Jemand hat eine unbekannte Menge Wasser hineingegossen. Der Abstand des Wasserspiegels vom Boden ist 10 cm größer als von der Oberkante. Wieviel l Wasser enthält der Behälter?

14. Ein großer Fisch von 54 kg wird in 3 Teile zerlegt. Das Kopfende wiegt 10 kg, der Rumpf zweimal soviel wie Kopf- und Schwanzende zusammen. Welches Gewicht hat jeder Teil?

15. Der Kohlenvorrat für eine Anzahl Lokomotiven reicht 5 Wochen. Werden 3 Lokomotiven außer Dienst gestellt, so reichen die Kohlen für 7,5 Wochen. Wieviel Lokomotiven sind vorhanden?

16. Das 14fache einer gedachten Zahl, vermehrt um das 10fache der um 2 vergrößerten Zahl, ist gleich dem 20fachen der um 3 vergrößerten Zahl, vermindert um 8. Wie groß ist die gedachte Zahl?

17. Von welcher Zahl ist das 21fache um 27 größer als das 9fache der um 17 vergrößerten Zahl?

18. Von zwei Brüdern ist der eine 21, der andere 17 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der ältere Bruder dreimal so alt wie der jüngere?

19. Ein Bauer mußte wegen Futtermangels 38 Kühe verkaufen, weil sonst der Futtervorrat statt für 8 Wochen nur für 6 Wochen reichen würde. Wieviel Kühe besaß er?

20. Ein Zimmer hat bei unbekannter Breite eine Länge von 10 m. Würde man Länge und Breite um 1 m verkürzen, so wäre der Flächeninhalt 15 m² geringer. Wie breit ist das Zimmer?

devoirs: **Kusch 1 / pages 223/224 exercises: 5, 10, 15, 20**

Exercice: *équations de texte avec fractions*

5. Addiert man zu einer Zahl 7, dividiert die Summe durch 3 und addiert zum Quotienten 1, so erhält man dasselbe, wie wenn man zur gesuchten Zahl 31 addiert, die Summe durch 6 dividiert und vom Quotienten 1 subtrahiert. Wie heißt die Zahl?

6. Addiert man zu einer bestimmten Zahl 3 und dividiert die Zahl 15 durch die Summe, so erhält man ebensoviel, wie wenn man von der bestimmten Zahl 3 subtrahiert und die Zahl 6 durch diese Differenz dividiert. Wie heißt die Zahl?

7. Dividiert man 40 durch eine Zahl und 12 durch die vorhergehende Zahl, so erhält man zwei Quotienten (Brüche), deren Differenz gleich 72, dividiert durch das Produkt der Zahlen, ist. Wie heißt die erste Zahl?

8. Addiert man zu einer gewissen Zahl 3, dividiert die Summe durch 4 und subtrahiert von diesem Bruch den 3. Teil der um 29 verkleinerten Zahl, so erhält man das Doppelte der gesuchten Zahl. Wie heißt die Zahl?

9. Zu welchem Zinsfuß sind zwei Kapitalien von 28000 DM und 23800 DM, die gleiche Zinsen brachten, ausgeliehen, wenn das erste $\frac{3}{4}$% weniger einbringt als das zweite?

10. Ein Kaufmann verkauft einen Posten Ware für 1012,50 DM. Wie hoch war der Einkaufspreis, wenn er die Ware mit 35% Aufschlag verkaufte?

11. Der Verkaufspreis einer Maschine betrug 11500 DM. Er muß wegen Einschaltung eines Zwischenhändlers erhöht werden. Wie hoch ist der neue Verkaufspreis, wenn dem Zwischenhändler für seine Vermittlung 8% Provision zugebilligt werden?

12. Die jährlichen Zinsen zweier Kapitalien von 7000 DM und 15000 DM betragen zusammen 1170 DM. Zu wieviel Prozent ist das erste ausgeliehen, wenn das zweite Kapital 1% niedriger verzinst wird als das erste?

13. Ein Händler will für eine bestimmte Summe Geldes Leinen kaufen. Kauft er 60 m, so fehlen ihm 140 DM; kauft er 35 m, so hat er 22,50 DM übrig. Wieviel Geld besitzt er? Was kostet 1 m Leinen?

14. Jemand zahlt für eine bestimmte Schuldsumme, die in 6 Monaten fällig ist, sogleich bar 1200 DM, weil ihm $\frac{2}{3}$% Diskont (Nachlaß) monatlich gewährt werden. Wieviel war er schuldig?

15. Zwei Kapitalien von 8000 DM und 15000 DM bringen jährlich zusammen 1300 DM Zinsen. Zu wieviel Prozent ist das erste Kapital ausgeliehen, wenn das zweite Kapital 1% höher verzinst wird als das erste?

30. Der Inhalt zweier Korbflaschen, die 25 l 84%igen bzw. 24 l 65%igen Alkohol enthalten, wird zusammengegossen. Wieviel Liter Wasser muß man hinzufügen, damit 61%iger Alkohol entsteht?

31. Für eine Glocke braucht man 300 kg Kupfer ($\varrho = 8{,}9\ \text{kg/dm}^3$) und 110 kg Zinn ($\varrho = 7{,}3\ \text{kg/dm}^3$). Welche Dichte hat die Legierung?

32. Ein Mann trinkt an einer Korbflasche Mineralbrunnen 21 Tage. Trinkt seine Frau auch davon, so reicht der Mineralbrunnen für 14 Tage. Wie lange brauchte die Frau, um den Mineralbrunnen allein zu trinken?

33. Eine Zeitung hat für den Druck ihrer Auflage zwei Druckpressen zur Verfügung. Die große Presse schafft die Arbeit in 4 Stunden. Beide Pressen schaffen die Arbeit in $2\frac{2}{5}$ Stunden. Wieviel Stunden braucht die kleine Presse allein für die Arbeit?

34. Eine Arbeit wird vom Arbeiter *A* in 7 Tagen 4 Stunden, von den Arbeitern *A* und *B* in 3 Tagen ausgeführt. Wieviel Tage braucht *B* allein (1 Arbeitstag = 8 Stunden)?

35. Ein Behälter faßt 860 l und kann durch drei Zuflußrohre *A*, *B* und *C* gefüllt werden. *A* schafft in 2 min 17,2 Liter, *B* in 3 min 12,9 Liter und *C* in 14 min 43 Liter. In wieviel Minuten wird der Behälter gefüllt, wenn alle drei Rohre zugleich füllen?

36. Hubert braucht für eine Arbeit 9 Tage. Nachdem er 4 Tage gearbeitet hat, hilft ihm Rudi, und beide beenden den Rest der Arbeit in 2 Tagen. Wieviel Tage würde Rudi allein für die ganze Arbeit benötigen?

37. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußrohre (*A*, *B*) und ein Abflußrohr (*C*). *A* allein füllt den Behälter in 80 min, *B* allein in 90 min. Durch *C* kann der Behälter in 60 min geleert werden. In welcher Zeit ist der Behälter gefüllt, wenn alle drei Rohre zu gleicher Zeit in Tätigkeit sind?

38. Eine Arbeit wird von 4 Arbeitern (*A*, *B*, *C*, *D*) ausgeführt. *A* allein braucht 8 Tage, *B* allein 9 Tage, *C* allein 10 Tage, *D* allein 11 Tage. In welcher Zeit (Stunden) ist die Arbeit fertig, wenn alle zugleich arbeiten (1 Tag = 8 Stunden)?

39. Dieter benötigt für eine bestimmte Arbeit 9 Tage. Nachdem er schon 2 Tage gearbeitet hat, hilft ihm Peter, und sie beenden die Arbeit in 4 Tagen. Wie lange würde Peter allein für die ganze Arbeit brauchen?

40. Eine Badewanne kann durch den aufgedrehten Wasserhahn einer Leitung in 4 Minuten halb gefüllt werden. Die Entleerung der gleichen Wassermenge dauert 6 Minuten. Jemand läßt Wasser hinein und vergißt den Abfluß zu schließen. Nach wieviel Minuten läuft die Wanne über?

devoirs: **Kusch 1 / pages 227/228 exercises: 5, 10, 15, 30, 40**

3.1.4 Proportions (équations de proportionnalité)

Une équation formée de deux rapports identiques est appelée proportion (équation de proportionnalité).

Éléments antérieurs Éléments postérieurs

Une proportion a 4 éléments: a : b = c : d (a se rapporte à b comme c à d)

Éléments extérieurs Éléments intérieurs

Le produit des éléments extérieurs d'une proportion est égal au produit des éléments intérieurs; c'est-à-dire que toute proportion peut être transformée en une équation de produit:

$$a : b = c : d$$

$$a * d = b * c$$

Preuve:

	=	/ *bd
* bd	= * bd	
	=	/ simplifier
a * d	= b * c	q.e.d

Une proportion dont les éléments intérieurs et extérieurs sont identiques est appelée proportion continue:

$$\left.\begin{array}{l} a : m = m : b \\ m : a = b : m \end{array}\right\} m^2 = ab$$

La grandeur *m* qui apparaît deux fois s'appelle moyenne proportionnelle entre a et b ou proportion continue en géométrie.

Si, pour 2 proportions, 2 rapports et plus sont égaux, on peut, par souci de concision, leur substituer une proportion continue (proportion à plusieurs éléments):

$$a : b = n : x$$
$$n : x = c : d$$
$$a : b = n : x = c : d$$
$$a : n : c = b : x : d$$

de même, l'inverse est vrai:

$$a : n : c = b : x : d$$
$$a : b = n : x$$
$$c : d = a : b$$
$$n : x = c : d \qquad \text{etc.}$$
$$a : n = b : x$$
$$c : a = d : b$$
$$n : c = x : d$$

Remarque:

- Si le Quotient des grandeurs ou lignes de nombres correspondantes est constant, on dit qu'elles sont proportionnelles les unes par rapport aux autres.

  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ proportionnel

  $a_n : b_n = q$ facteur de proportionnalité

- Si le Produit des grandeurs ou lignes de nombres correspondantes est constant, on dit qu'elles sont inversement proportionnelles les unes par rapport aux autres.

  $a_1 * b_1 = a_2 * b_2$ inversement proportionnel car $a_1 : a_2 =$ **Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen.** : **Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen.**

  $(a_1 : a_2 = b_2 : b_1$

  $a_1 : a_2 =$ **Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen**

Exemple:

1) Pour fabriquer 40kg de bronze, il faut 5,6kg d'étain. Combien de kg d'étain sont nécessaires pour fabriquer 130kg de bronze?

   pour 40kg bonze → 5,6kg étain
   pour 130kg bonze → xkg étain

   $40 : 130 = 5{,}6 : x$

   $40x = 130 * 5{,}6$

   $x = 130 * 5{,}6 / 40$

   $x = 18{,}2$

   ⇒ pour 130kg bronze,il faut 18,2kg d'étain.

3.1.5 Exercice: proportions

7. $4\frac{1}{5}$ g : $3\frac{3}{4}$ g

8. 0,78 kg : 1,17 kg

9. 0,48 : 1,28

10. $\frac{4{,}2}{a} : \frac{2{,}8}{a}$

11. $3 : 4 = 9 : x$

$3 \cdot x = 4 \cdot 9$

$x = \frac{36}{3} = \underline{\underline{12}}$

12. $10 : x = 2 : 1$

13. $6 : 4 = x : 4$

14. $14 : 5 = 28 : x$

15. $8\frac{1}{3} : 1\frac{2}{3} = 1\frac{3}{7} : x$

20. $6 : 10 = x : (x + 40)$

21. $x : (2x + 7) = 9 : 21$

22. $(13x + 1) : 7 = 14 : 20$

23. $\left(x + 1\frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{6}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

24. $28 : (x - 9) = 35 : (2x - 19)$

25. $(x + 0{,}3) : (x + 3{,}6) = (x - 1{,}9) : (x - 0{,}8)$

26. $(x - b) : a = (x - a) : b$

27. $2x : (2x + b) = (3x + 2b) : (3x + 4b)$

28. $11{,}4 : 0{,}95 = x : 1{,}75$

29. $100 : x = 144 : n$

30. $6 : [2(x + 1)] = 9 : (4x - 1)$

40. Für 100 g Lot braucht man 90 g Zinn und 10 g Blei. Wieviel g Zinn und Blei sind in 4,5 kg Lot enthalten?

41. Silberlot 9 enthält 43 % Kupfer, 48 % Zink und 9 % Silber. Wieviel kg von jedem Metall sind in 8,5 kg Lot enthalten? Stellen Sie die Anteile graphisch in Prozentsätzen der Kreisfläche dar.

42. Ein Architekt erhält für die Bauleitung $3\frac{1}{4}$ % der Bausumme, die 64 215,— DM beträgt. Wie hoch war sein Verdienst?

43. Der Neubau eines Schulgebäudes ist auf 6 356 000,— DM veranschlagt. Nach Fertigstellung ergibt sich eine Überschreitung um 8 %. Wieviel DM hat die Herstellung der Schule in Wirklichkeit gekostet?

44. Die Drehzahlen zweier Riemenscheiben A und B verhalten sich wie 204 zu 286. Welches Verhältnis besteht zwischen den Durchmessern? Wie groß ist der Durchmesser von A, wenn der von B 240 mm beträgt?

45. Ein Elektromotor mit einer Drehzahl von 1400 U/min und einer Riemenscheibe von 120 mm ϕ treibt eine Bohrmaschine mit einer Riemenscheibe von 340 mm. Wieviel Umdrehungen macht der Bohrer?

46. Ein Elektromotor mit der Drehzahl 1440 U/min soll eine Schleifscheibe von 60 mm ϕ antreiben. Die Schleifscheibe soll laut Angabe auf dem Pappring eine Umfangsgeschwindigkeit von 30 m/s haben, ihre Riemenscheibe hat 40 mm ϕ. Welchen Durchmesser muß die Riemenscheibe des Motors erhalten?

47. Ein Elektromotor mit 960 U/min hat ein Zahnrad mit 30 Zähnen. Über ein zweites Zahnrad mit 300 Zähnen treibt er eine Kurbelwelle an. Das Zahnrad auf der Kurbelwelle hat 48 Zähne. Wie hoch ist die Drehzahl der Kurbelwelle? Wie groß ist das Gesamtübersetzungsverhältnis?

48. Ein leichter Verbrennungsmotor hat folgenden Energieverbleib:

Kühlwasserverluste	30 %	Getriebeverluste	4 %
Auspuffgasverluste	34 %	Nutzleistung	32 %

a) Stellen Sie die Verluste graphisch dar (Sankey-Diagramm).

b) Der Motor hat 12 l Brennstoff verbraucht. Wieviel Liter waren für die einzelnen Verluste erforderlich?

49. Eine Eisenbahnlinie hat im Gebirge eine Steigung von 1 : 40. Wieviel Meter muß die Bahn zurücklegen, um 125 m zu steigen?

50. Eine Straße hat eine Steigung von 1 : 80. Um wieviel Meter ist ein Auto gestiegen, wenn es 2,4 km zurückgelegt hat?

60. Ein Tauchsieder erzeugt bei einer Stromstärke von $I_1 = 2$ A eine Wärmemenge $Q_1 = 820$ cal. Berechnen Sie die Wärmemenge Q_2, die ein Tauchsieder bei einer Stromstärke $I_2 = 4{,}5$ A erzeugt. (Bei gleichem Widerstand ist die in einem Leiter erzeugte Wärmemenge dem Quadrat der Stromstärke verhältnisgleich: $Q_1 : Q_2 = I_1^2 : I_2^2$.)

devoirs: **Kusch 1 / pages 245…247 exercises: 10, 20, 30, 40, 50, 60**

3.2 Équations à plusieurs inconnues

1.1.1 Équations numériques à plusieurs variables

Une équation peut aussi avoir deux ou plusieurs variables. Si deux équations à deux variables sont données, il se peut que parmi les solutions (paires de nombres), il y ait une paire de solutions qui s‘applique simultanément aux deux équations et qui mène donc à des affirmations vraies.
Si plusieurs équations sont données pour déterminer les solutions, alors on parle d‘un système d‘équations.

Système de 2 équations à 2 variables:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 4x + 2y &= 18 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x = 2}}; \quad \underline{\underline{y = 5}}$$

3.2.1.1 Méthode d’addition

Une équation ou les deux équations sont multipliées par un chiffre, de sorte qu’une variable soit supprimée lors de l’addition qui suit:

$$\begin{array}{rcl|l} 15x + 2y & = & 126 & *2 \\ 3x - 4y & = & 12 & \end{array}$$

$$+ \left| \begin{array}{rcl} 30x + 4y & = & 252 \\ 3x - 4y & = & 12 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 33x &= 264 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 8}} \end{aligned}$$

Pour trouver la seconde variable, on insère la variable calculée dans l’une des deux équations:

$$\begin{aligned} 3 * 8 - 4y &= 12 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 3}} \end{aligned}$$

3.2.1.2 Méthode d'équivalence

Transformer les deux équations en fonction d'une variable et les égaliser:

$$\begin{aligned} 15x + 2y &= 126 \\ 3x - 4y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (126 - 2y)/15 \\ x &= (12 + 4y)/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (126 - 2y)/15 &= (12 + 4y)/3 \\ 126 - 2y &= 5(12 + 4y) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Pour trouver la seconde variable, on insère à nouveau la variable calculée dans l'une des deux équations:

$$\begin{aligned} x &= (12 + 4*3)/3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

3.2.1.3 Méthode de substitution

Calculer une variable à partir d'une équation et l'insérer dans l'autre équation

$$\begin{aligned} 15x + 2y &= 126 \\ 3x - 4y &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (12 + 4y)/3 \\ 15x + 2y &= 126 \\ 15(12 + 4y)/3 + 2y &= 126 \\ 60 + 20y + 2y &= 126 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Pour déterminer la seconde variable, on insère la variable calculée dans l'une des deux équations:

$$\begin{aligned} x &= (12 + 4*3)/3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

3.2.1.4 Exercice: équations numériques à plusieurs variables

1. $2x + 2y = 20$; $2x - 2y = 4$

2. $x - y = 65$; $2x + 2y = 214$

3. $10x + 2y = 80$; $3x + y = 26$

4. $3x + 7y = 60$; $2x + 18y = 80$

5. $18x - 2y = 12$; $3x + \frac{y}{3} = 10$

6. $3x - 3y = 3$; $2x + y = 11$

7. $6x + 9y = -42$; $2x + 4y = -16$

8. $6x + 2y = -10$; $-x - 2y = -5$

9. $4x - 2y = 16$; $3x + y = 17$

10. $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y = -11$; $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y = -4$

11. $4x + 6y = -36$; $3x + 2y = -17$

12. $30x - 28y = 100$; $5x - 2y = 30$

13. $5x - 2y = 27{,}2$; $5x - 4y = 20{,}4$

14. $5x + 8y = 47$; $8x - 6y = 0$

15. $x = 3y - 2$; $x = 5y - 12$

16. $4x = 6y + 2$; $6x = 14y - 12$

17. $4{,}5x + 4y = 100$; $3x - 8y = 10$

18. $14x + \frac{y}{2} = 188$; $6x + \frac{y}{8} = \frac{159}{2}$

19. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{12}$

20. $\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = \frac{1}{20}$; $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{16}{30}$

21. $14x - \frac{6}{y} = 32$; $3x - \frac{2}{y} = 4$

22. $\frac{8{,}4}{x} - \frac{4{,}5}{y} = \frac{9{,}6}{3{,}2}$; $\frac{4{,}9}{x} - \frac{2{,}5}{y} = 2$

23. $10(7x-1) + 12(3+2y) = 612$; $4x + 158 = 6(9y - 5)$

24. $5(x-4) - 2(y+15) = -33$; $18y + 16x - 6(7y-1) = -186$

25. $\frac{5}{2}x - \frac{10}{3}y = 10$; $\frac{22}{3}x - \frac{11}{2}y = 55$

26. $ax + ny = a^2 + n^2$; $ay + nx = a^2 + n^2$

27. $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 0$; $3(x+1) - 2(y-3) = 2x + 1$

28. $\frac{2}{2+8y} = \frac{4}{2+x}$; $\frac{3}{3-12y} = \frac{14}{2-x}$

29. $2x + 2y = 18$; $\frac{x+2y-2}{y-2x+4} = 12$

30. $\frac{8-x}{3} - 15 = -2y$; $\frac{9+y}{8} + 23 = 5x$

31. $\frac{x-12}{7-y} = \frac{x-13}{11-y}$; $\frac{2x+4}{10+x} = \frac{34-2y}{18-y}$

32. $\frac{4x-2}{2y+1} = 2$; $x + y = 15$

33. $\frac{3x-2y}{3x-y} = \frac{10}{16}$; $x + y = 20$

34. $\frac{2x+4}{5} + \frac{14x+5y}{10} = 3$; $\frac{14y+4x}{8} - \frac{5y-x}{3} = 1$

35. $2x + 2y = 2m + 2n$; $x - y = m - n$

36. $\frac{2y-8}{4} + \frac{x+3}{20} = \frac{3}{4}$; $\frac{4x-y}{3} - \frac{3x-1}{10} = \frac{1}{2}$

37. $x + y = 7$; $y + z = 14$; $x + z = 11$

38. $x + y = 28$; $x + z = 30$; $y + z = 32$

39. $6x - 2y = 22$; $5z + 7y = 33$; $16z - 14x = -54$

40. $2x + 8y + 14z = 178$; $7x + y + 4z = 74$; $4x + 7y + z = 77$

41. $x + y + z = 100$; $x : y : z = 12 : 6 : 2$

42. $14x - 6y - 22z = 76$; $18x + 4y - 120z = 8$; $2x - 2y - 2z = 4$

43. $\frac{2}{2x+2y} = \frac{6}{5}$; $\frac{2}{2x+2z} = \frac{8}{6}$; $\frac{2}{2y+2z} = \frac{12}{7}$

44. $x + y = 8$; $y + z = 14$; $z + n = 22$; $n - x = 10$

45. $x + y + z = 29$; $x : y = 6 : 8$; $y : z = 4 : 6$

46. $x + y + z = 1{,}5$; $x = 3y$; $y : z = 1 : 2$

devoirs: **Kusch 1 / pages 255/256 exercises: 1…5, 10, 20, 30, 40**

3.2.2 Équations de texte à plusieurs variables

Exemples:

1) Quels sont les nombres dont la différence est égale à 10 et le quotient à 3?

$$x - y = 10$$
$$x/y = 3$$

$$x = 3y$$

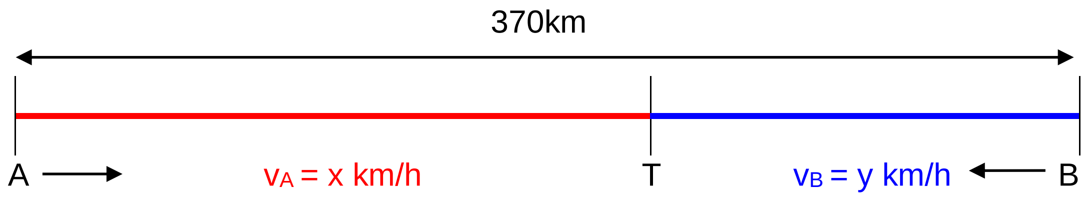
Méthode de substitution $3y - y = 10$

$$\underline{\underline{y = 5}} \qquad \underline{\underline{x = 15}}$$

2) Deux automobilistes A et B partent de deux lieux distants l'un de l'autre de 370km. Ils se croisent au bout de 4 heures. Si B partait ½ heure après A, ils seraient encore à 20 km l'un de l'autre 4 heures après le départ de A. Combien de kilomètres chacun parcourt-il en une heure?

A parcourt x km/h
B parcourt y km/h

distance = temps * vitesse



1er cas: A est en route 4h et B 4h → parcourent ensemble 370km
2ème cas: A est en route 4h et B3,5h → parcourent ensemble 370 – 20 = 350km

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 4y = 370 \\ 4x + 3{,}5y = 350 \end{array}\right| \quad *(-1)$$

Méthode des additions

$$4x + 4y = 370$$
$$-4x - 3{,}5y = -350$$

$$0{,}5y = 20$$
$$y = 40$$

Méthode de substitution

$$4x + 4*40 = 370$$
$$x = 52{,}5$$

⇒ A parcourt <u>52,5 km/h</u> et B <u>40 km/h</u>!

3.2.3 Exercice: Équations de texte à plusieurs variables

1. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 27. Multipliziert man die erste Zahl mit 2 und die zweite mit 3, so wird die Differenz gleich 41. Wie heißen die Zahlen?

2. Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 5. Vermehrt man die erste um 3 und die zweite um 2, so verhalten sich die neuen Zahlen wie 2 : 3. Wie heißen die ursprünglichen Zahlen?

3. Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 12. Stellt man die Ziffern um, so ist die neue Zahl $1\frac{3}{4}$mal kleiner als die ursprüngliche. Wie heißt die letztere?

4. Gibt ein Geselle einem zweiten 3 Schrauben ab, so haben beide gleich viel; gibt aber der zweite dem ersten 2 Schrauben, so hat der erste 6mal soviel wie der zweite. Wieviel Schrauben hat jeder?

5. Zwei Kapitalien, 4350 DM und 9750 DM, sind zu verschiedenen Prozentsätzen ausgeliehen und bringen jährlich zusammen 1383 DM Zinsen. Stünde das erste Kapital zum Prozentsatz des zweiten und das zweite zum Prozentsatz des ersten, so brächten sie zusammen 1437 DM Zinsen. Zu wieviel Prozent stehen die Kapitalien?

6. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußrohre. Ist das erste 24 min, das zweite 30 min geöffnet, so fließen 984 l ein. Ist hingegen das erste 18 min und das zweite 20 min geöffnet, so fließen 688 l ein. Wieviel Liter Wasser liefert jedes Rohr?

7. Wieviel Akkumulatorensäure von der Dichte 1,15 kg/dm³ und wieviel von der Dichte 1,2 kg/dm³ ergeben zusammen 2,5 l Säure von der Dichte 1,17 kg/dm³?

8. Wieviel Kupfer von der Dichte 8,8 kg/dm³ und wieviel Zinn von der Dichte 7,3 kg/dm³ ergeben 60 kg Rotguß von der Dichte 8,5 kg/dm³?

9. Zwei Arbeiter (A und B) erhalten zusammen 630 DM Wochenlohn (6 Tage). Wieviel DM erhält jeder, wenn A in 10 Tagen 30 DM mehr verdient als B in 7 Tagen?

10. Ein Motorboot fährt 48,27 km in 3 Stunden den Strom abwärts. Für den Rückweg braucht es 5 Stunden. Wie schnell würde das Boot im stillen Wasser fahren, und wie hoch ist die Geschwindigkeit der Strömung?

11. Ein Flugzeug braucht für 579,24 km mit dem Wind 2 Stunden, für den Rückflug gegen den Wind $3\frac{3}{5}$ Stunden. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Flugzeuges und die des Windes?

12. 3 Pumpen sollen einen Wasserbehälter von 1200 m³ Inhalt auspumpen. Die erste und zweite schaffen es in $10\frac{10}{11}$ Stunden, die erste und dritte in $8\frac{4}{7}$ Stunden, die zweite und dritte in $7\frac{1}{2}$ Stunden. Wieviel m³ leistet jede Pumpe je Stunde? Wann ist der Behälter leer, wenn alle Pumpen zugleich arbeiten?

13. In einer Werkstatt zählen Meister, Geselle und Auszubildender zusammen 103 Jahre; Meister und Auszubildender 80 Jahre, Geselle und Auszubildender 39 Jahre. Wie alt ist jeder?

14. Eine Legierung (Bronze) besteht aus reinem Kupfer ($\varrho = 8{,}88$ g/cm³) und reinem Zinn ($\varrho = 7{,}29$ g/cm³). Sie wiegt in der Luft 1500 g, unter Wasser 1323 g. Wieviel Gramm von jedem Metall enthält die Legierung?

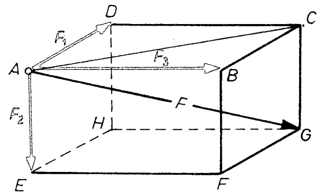
15. Ein Meister hat am 1. November zwei Wechsel über 2800,— DM einzulösen. Löst er die Wechsel bereits am 1. August ein, so erhält er 2762,— DM. Wie hoch sind die Wechsel, wenn für den einen 6%, für den anderen 5% Diskont gerechnet werden?

16. Zwei kleine kreisrunde Blechplatten haben zusammen den gleichen Umfang wie eine große Blechplatte von 3 m Durchmesser. Legt man die kleine der beiden Blechplatten konzentrisch auf die größere, so entsteht ein Kreisring. Die große Blechplatte ist dann dreimal so groß wie der Kreisring. Wie groß sind die Durchmesser der beiden kleinen Blechplatten?

17. Vergrößert man den Durchmesser einer kreisrunden Grundfläche eines Fasses um 20 cm, so wächst der Flächeninhalt um 1963,5 cm². Wie groß war der Durchmesser vorher?

18. Ein Dampfer fährt gegen den Strom und legt eine Strecke von 120 km in 6 Stunden 20 Minuten zurück. Mit dem Strom braucht er nur 5 Stunden 45 Minuten. Welche Geschwindigkeit haben Schiff und Wasser?

19. Ein Schmiedehammer fällt aus einer Höhe von 2,35 m auf ein Schmiedestück. Welche Endgeschwindigkeit in m/s hat der Hammer?



20. Eine Kraft $F = 35$ kN soll in drei zueinander senkrechtstehende Teilkräfte F_1, F_2 und F_3 zerlegt werden, die sich wie 2 : 3 : 7 verhalten. Alle Kräfte haben den gemeinsamen Angriffspunkt A. Wie groß sind die Kräfte?

devoirs: **Kusch 1 / pages 256/257 exercises: 5, 10, 15**

4