

Mathématique

INFORMATIQUE DU BÂTIMENT





EIT.swiss

Grandeurs et masses

Objectifs évaluateurs:

- Convertir, déduire et utiliser les unités physiques SI
- Interpréter les tableaux de valeurs

Table des matières

1.	Puissance de 10.....	3
2.	Unités SI	4
3.	Puissance de 10 et bases des unités SI	5
4.	Interpréter des tableaux de valeurs	8

1. Puissance de 10

Puissances de dix

Écrivez comme une puissance de 10. L'exposant doit être divisible par 3 (ex.: exposant -9, -6, -3, 3, 6, 9).

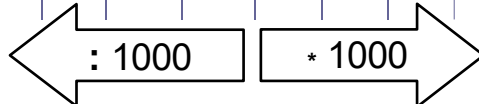
1)	1'000 = 10^3	8)	0,001 = $1 \cdot 10^{-3}$
2)	1'000'000	9)	0,000'001
3)	1'000'000'000'000	10)	0,03 = $30 \cdot 10^{-3}$
4)	4'000 = $4 \cdot 10^3$	11)	0,079
5)	11'000	12)	0,87
6)	123'000'000	13)	$0,5 \cdot 10^4$
7)	$3,5 \cdot 10^7$	14)	$0,92 \cdot 10^{-4}$

Puissances de dix et pourcentages

	Puissances de dix	Symbol	Nom	Exemple
1 000 000 000 000 000	10^{15}	P	Peta	
1 000 000 000 000	10^{12}	T	Tera	TWh
1 000 000 000	10^9	G	Giga	GW, GHz,
1 000 000	10^6	M	Mega	MW, MV, MWh, MΩ, MHz
1 000	10^3	k	kilo	kg, km, kV, kW, kΩ
1	10^0	----	----	Bases des unités
0,001	10^{-3}	m	milli	ml, mm, mg, ms, mΩ, mV
0,000 001	10^{-6}	μ	mikro	μm, μg, μs, μF, μA
0,000 000 001	10^{-9}	n	nano	nm, ns, nF
0,000 000 000 001	10^{-12}	p	pico	pF
0,000 000 000 000 001	10^{-15}	f	femto	

Groupe de nombres: 000'000'000'000'000 . 000'000'000'000

Préfixe d'unité:	TERA	GIGA	MEGA	KILO	(EINER)	milli	mikro	nano	pico
Symbole:	T	G	M	k		m	μ	n	p
Puissance de dix	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}



Exemple

touche **EE**

102,8 MHz = $102,8 \cdot 10^6$ Hz = 102 800 000 Hz
[dans l'unité de base: 1 0 2 | 8 | EE 6]

48 nF = $48 \cdot 10^{-9}$ F = 0.000 000 048 F
[dans l'unité de base: 4 8 | EE +/- 9]

2. Unités SI

2.1 Unités de mesure

- Les **unités SI** reposent sur sept **unités de base**:
- Mètre (m) pour la longueur
- Kilogramme (kg) pour la masse
- Seconde (s) pour le temps
- Kelvin (K) pour la température
- Ampère (A) pour l'intensité électrique
- Candela (cd) pour l'intensité lumineuse
- Mol (mol) pour la quantité de matière

Outre ces unités de base, il existe aussi des unités dérivées qui ont leur propre nom et qui revêtent une grande importance. Elles sont formées par la combinaison d'unités de base.

Parmi les plus importantes, on trouve:

- pour la *force* le *Newton* (N; $1\text{N} = 1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$)
- pour l'*énergie* le *Joule* (J; $1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m} = 1\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$)
- pour la *puissance* le *Watt* (W; $1\text{W} = 1\text{J}/\text{s} = 1\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$)
- pour la *pression* le *Pascal* (Pa; $1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2 = 1\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}^2$)
- pour la *fréquence* le *Hertz* (Hz; $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$)
- pour la *charge électrique* le *Coulomb* (C; $1\text{C} = 1\text{A}\cdot\text{s}$)
- pour la *tension électrique* le *Volt* (V; $1\text{V} = 1\text{W}/\text{A}$)
- pour la *résistance électrique* le *Ohm* (Ω ; $1\Omega = 1\text{V}/\text{A}$)
- pour la *capacité électrique* le *Farad* (F; $1\text{F} = 1\text{A}\cdot\text{s}/\text{V}$)
- pour l'*inductance* le *Henry* (H; $1\text{H} = 1\text{V}\cdot\text{s}/\text{A}$)
- pour le *flux magnétique* le *Weber* (Wb; $1\text{Wb} = 1\text{V}\cdot\text{s}$)
- pour l'*induction magnétique* le *Tesla* (T; $1\text{T} = 1\text{V}\cdot\text{s}/\text{m}^2$)
- pour l'*éclairage lumineux* le *Lux* (lx; $1\text{lx} = 1\text{lm}/\text{m}^2$)

La lampe normale (lampe normalisée) qui émet un flux lumineux de 1 lumen (lm) dans toutes les directions possède une intensité lumineuse de 1 candela (cd).

3. Puissance de 10 et bases des unités SI

Écrivez comme une puissance de 10. L'exposant doit être **divisible par 3** (ex.: exposant -9, -6, -3, 3, 6, 9) et écrivez l'unité SI à chaque fois..



Nombre avec SI - Unité de base	Nombre avec puissance de 10 et unité de base SI	Préfixe d'unité	Nombre avec préfixe de mesure et unité de base SI
1) 5'000 m	$5 \cdot 10^3 m$		
2) 14'000 m			
3) 165'000 m			
4) 2'000 g			
5) 85'000 g			
6) 0,025 m			
7) 0,725 m			
8) 0,000'163 m			
9) 0,002 g			
10) 0,014 s			
11) 0,019 ℓ			
12) 0,171 ℓ		Milli	171 mℓ



Préfixe de mesure et unité

Inscrivez la mesure correspondante et ensuite le nombre avec la mesure dans le tableau ci-dessus. Vous trouverez le préfixe de mesure dans votre livre de formules.

Unité de base SI

Écrivez les chiffres dans l'unité de base SI. Peu importe le nombre de zéros. Ne pas utiliser de préfixe de mesure.

1) 3 km = 3'000 m	8) 61 nm
2) 22 km	9) 0,025 km = 25 m
3) 412 kg	10) 0,962 kg
4) 22 mℓ = 0,022 ℓ	11) 12'000 mg
5) 312 mm	12) 517'000 mm
6) 23 μm	13) 54'000 μm
7) 987 μg	14) 8'000'000'000 nm



EIT.swiss

Grandeurs et masses

Convertir

Convertissez dans les proportions données.

1)	500 μA	= 0,5 mA	16)	0,000'1 Ω	m Ω
2)	4'210 Ω	k Ω	17)	10 pF	nF
3)	95'200 k Ω	M Ω	18)	720 μA	A
4)	3,333 A	mA	19)	2'400 W	MW
5)	12 mV	V	20)	7'000 kW	TW
6)	1 kV	mV	21)	3'024 A	mA
7)	47 k Ω	M Ω	22)	0,023 TW	MW
8)	12 mm	m	23)	3,333 A	kA
9)	65'930 μm	km	24)	70 p F	nF
10)	1,23 kV	V	25)	0,053 mF	μF
11)	3'300 V	MV	26)	0,5 mm	m
12)	1 MV	mV	27)	7'900'000 nm	mm
13)	120,23 mV	V	28)	5,7 mV	kV
14)	234 μV	V	29)	5124 A	kA
15)	0,02 GW	kW	30)	10 ⁻² V	mV

Calculer avec des préfixes d'unité

Calculez

1)	1,04 m + 97 mm = 1,137 m	7)	1,078 V – (798 mV + 120 μV)
2)	0,035 k Ω + 486 Ω	8)	1,59 km – 879 m + 789'541 mm
3)	120'000 mV – 0,09 kV	9)	847,43 m Ω + 1,13 Ω
4)	12'573 g – 3,354 kg + 135 g	10)	3,65 MW – 534,2 kW – 897 W
5)	3,5 ℓ – 153,7 m ℓ – 0,098 ℓ	11)	0,0053 mA + 642,7 μA
6)	53 mA + 485 μA + 974 mA	12)	5,32 kV – 953 V – 12'985 mV



Grandeurs et masses

Exercice: calculer avec des unités SI

1. $U = 0,06V + 30mV + 80000\mu V + 3 \cdot 10^2 mV + 4 \cdot 10^{-4} kV =$
2. $I = 0,38 \cdot 10^{-1} A + 1,7 \cdot 10^3 mA + 5 \cdot 10^5 \mu A + 300mA + 0,7A =$
3. $R = 0,47k\Omega + 2,2 \cdot 10^2 \Omega + 5,6 \cdot 10^5 m\Omega + 8,2 \cdot 10^{-4} M\Omega + 100\Omega =$
4. $P = 5 \cdot 10^9 \mu W + 3 \cdot 10^3 W + 5,5kW + 2500W + 7 \cdot 10^6 mW =$
5. $U = 0,005V + 8 \cdot 10^{-2} mV + 14 \cdot 10^{-4} V + 3,6 \cdot 10^1 \mu V + 4200 \cdot 10^{-2} \mu V =$
6. $220V \cdot 0,25A =$
7. $(220V)^2 / 30VA =$
8. $345pAs/V \cdot 200V =$
9. $49VA / (14kA \cdot 7mV) =$
10. $48\mu VA / 12mA =$
11. $\frac{1}{40 \text{ 1/s} \cdot 2kV/A} =$
12. $24As^2 / (3ms \cdot 2kA) =$
13. $27\mu\Omega^2 / 3m\Omega =$
14. $\sqrt{(2,5mA)^2 + (2mA)^2} =$

Exercice: calculer avec des mesures données:

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\frac{k}{m} =$ | 14. $\frac{1}{k} =$ | 28. $\frac{m}{k} =$ |
| 2. $\frac{1}{k \cdot m} =$ | 15. $k \cdot p =$ | 29. $k \cdot k =$ |
| 3. $1/\mu =$ | 16. $\frac{k}{m} =$ | 30. $\frac{1}{m \cdot M} =$ |
| 4. $G \cdot \mu =$ | 17. $m \cdot m =$ | 31. $(m \cdot k)/\mu =$ |
| 5. $k \cdot \mu =$ | 18. $1/(k \cdot \mu) =$ | 32. $\frac{k}{\mu \cdot m} =$ |
| 6. $M \cdot p =$ | 19. $(M \cdot \mu)/m =$ | 33. $(p \cdot M)/\mu =$ |
| 7. $\frac{G \cdot m}{M} =$ | 20. $\frac{m \cdot M}{k} =$ | 34. $\mu \cdot \frac{G}{m \cdot M} =$ |
| 8. $(\mu \cdot k)/m =$ | 21. $(k \cdot \mu)/m =$ | 35. $p \cdot k =$ |
| 9. $\frac{n \cdot M}{k} =$ | 22. $\frac{m \cdot G}{M \cdot k} =$ | 36. $\frac{1}{G} =$ |
| 10. $(n \cdot k)/(\mu \cdot m) =$ | 23. $\frac{1}{m} =$ | 37. $k \cdot n =$ |
| 11. $\frac{m \cdot M}{n \cdot G} =$ | 24. $M \cdot m =$ | 38. $\frac{M}{k} =$ |
| 12. $\frac{k \cdot G}{M} =$ | 25. $\mu \cdot k =$ | 39. $\mu \cdot \mu =$ |
| 13. $m \cdot G =$ | 26. $\frac{1}{M} =$ | 40. $M \cdot p \cdot k =$ |
| | 27. $M \cdot p =$ | |

4. Interpréter des tableaux de valeurs

Méthodes de représentation graphique

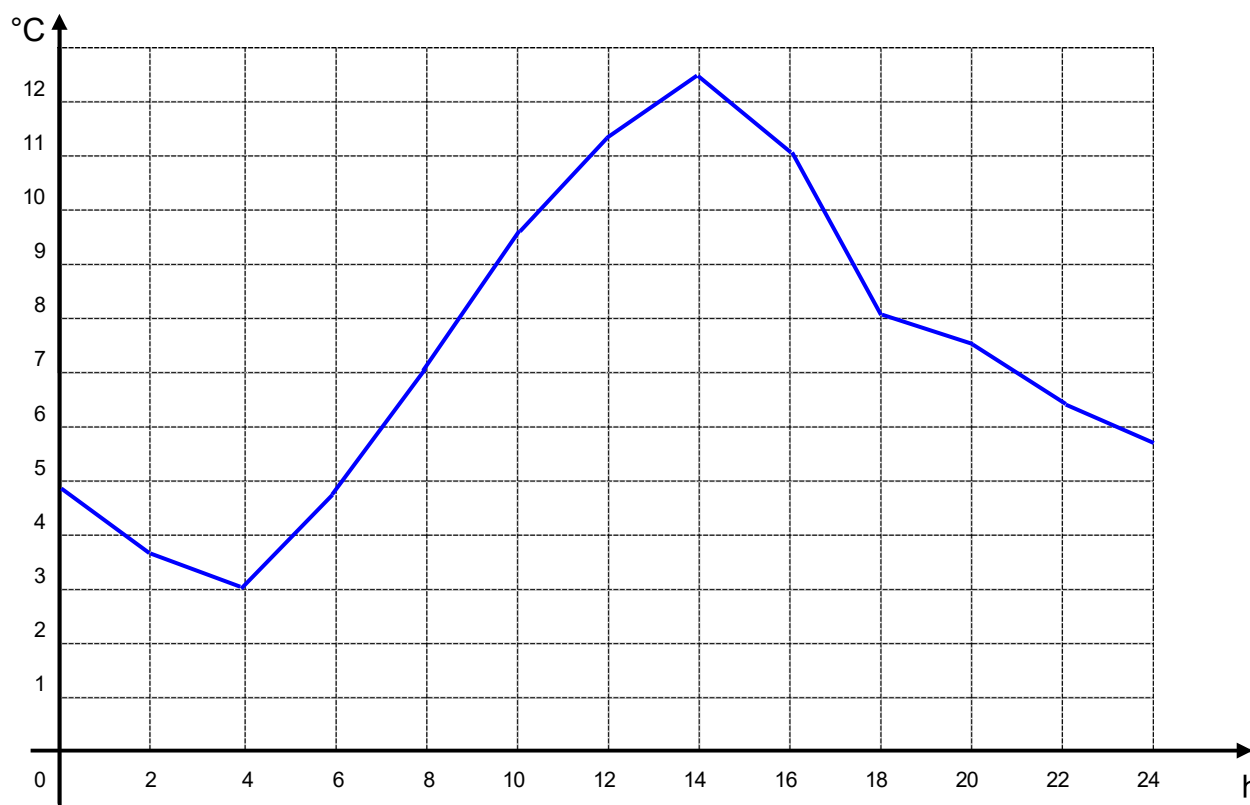
Les relations simples sont souvent représentées graphiquement sous forme d'un diagramme. Des séries d'observations de la vie quotidienne ou professionnelle sont par exemple représentées sous forme de diagrammes

Exemples:

1) Température de l'air durant une journée

La mesure a été effectuée à minuit, à des intervalles de 2h, et a donné le tableau suivant:

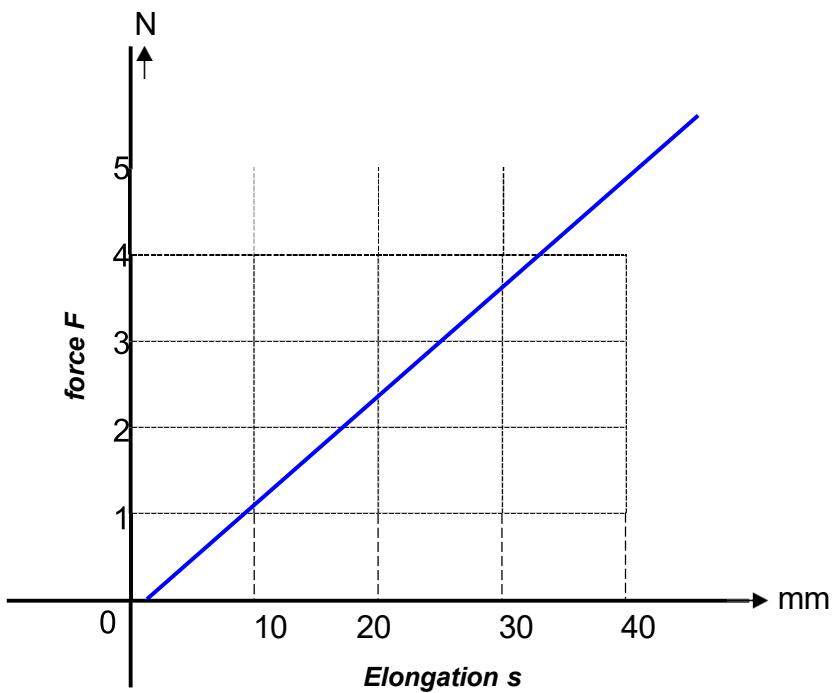
h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
°C	4,8	3,6	3,0	4,8	7,0	9,5	11,2	12,4	11,0	8,0	7,5	6,3	5,7



2) Courbe caractéristique d'un ressort

Un ressort hélicoïdal est soumis à différentes forces de traction F . Les allongements s qui en résultent sont reportés dans un tableau:

s (in mm)	0	8	16	24	32	40
F (in N)	0	1	2	3	4	5



On voit très bien que cette fonction est linéaire, la loi de Hook s'applique donc ici:

$$F = k * s \quad \text{p.ex.: } F = 4\text{N} ; s = 32\text{mm} ; k = ?$$

FF

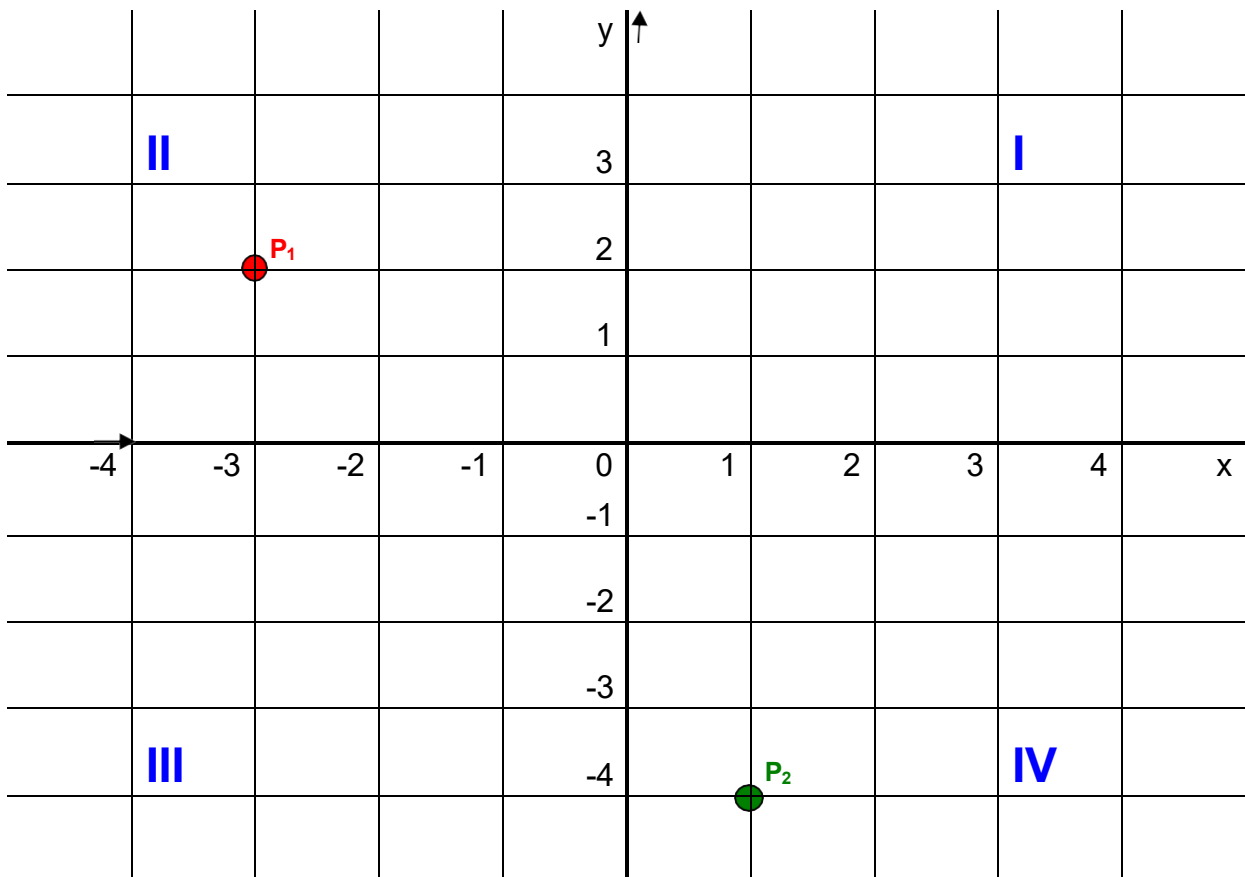
k = constante du ressort [N/mm]
 s = déformation du ressort (Élongation) [mm]
 F = force du ressort [N]

Systèmes de coordonnées

Les systèmes de coordonnées ont pour tâche de décrire avec précision la position d'un point ou la courbe d'une fonction. On utilise généralement pour cela, le système de coordonnées cartésiennes ou le système de coordonnées polaires.

Système de coordonnées cartésiennes

Il se compose de deux droites numériques perpendiculaires l'une à l'autre, dont le point zéro est commun.



- l'axe horizontal se nomme l'axe des abscisses ou l'axe des x
- l'axe vertical se nomme l'axe des ordonnées ou axe des y

Un point peut être défini de manière univoque par le système de coordonnées.

Soit: $P(x/y)$

Pour les 2 points ci-dessus, on trouve:

$P_1(-3/2)$, $P_2(1/-4)$

Le point où les axes x et y se croisent s'appelle l'origine des coordonnées et se trouve au point $P(0/0)$.

Le croisement des axes divise le plan en quatre cases, les quadrants:

- Ils sont désignés par les chiffres romains I, II, III, IV.
- Le signe des coordonnées détermine dans quel quadrant se trouve le point.

Valeurs de x et y, avec les quadrants correspondants:

Quadrant	Abscisse X	Oronnée Y
I		
II		
III		
IV		

Le système de coordonnées cartésiennes fait partie des systèmes de coordonnées parallèles et possède des coordonnées parallèles à angle droit. Par ailleurs, il existe également des systèmes de coordonnées à angle oblique.

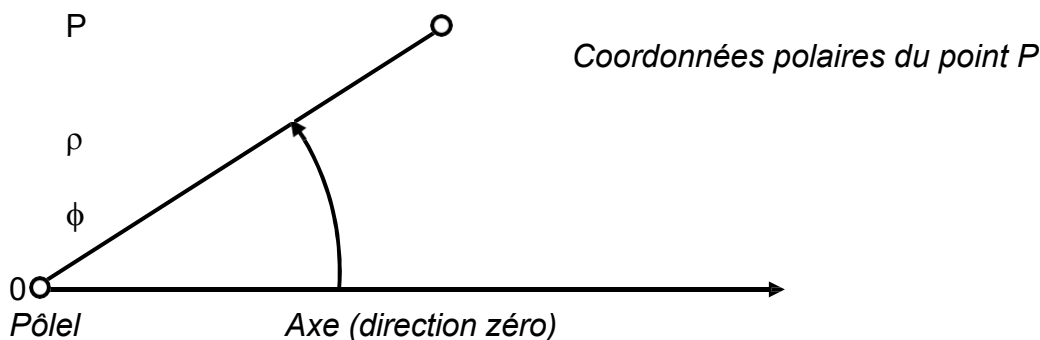
- Les relations fonctionnelles peuvent être illustrées graphiquement par des courbes et représentées dans un système de coordonnées.
- Par courbe, on entend l'image géométrique d'une fonction..

Coordonnées polaires

Un système de coordonnées polaires est déterminé par un point fixe 0, le *point de départ* ou *pôle*, et par une *direction zéro* ou un *axe* partant de lui, sur lequel des longueurs positives peuvent être reportées et mesurées comme sur un rayon numérique.

Un point quelconque P de la surface peut donc être déterminé comme suit:

- l'angle ϕ selon lequel le rayon numérique doit être tourné dans le sens mathématique positif jusqu'à ce qu'il passe par le point P
- la distance positive ρ du point P de 0



Fonctions

Extrait du livre de calcul Europa ET, édition 16

Eine Funktion ordnet einer Größe *eine* andere Größe zu, z. B. einem Zeitpunkt t *einen* Spannungswert U .

$U = f(t)$ bzw. $U(t)$ bedeutet dann:

„ $U = f$ von t “ bzw. „ U ist eine Funktion von t “

Man kann eine Funktion angeben durch

- eine Formel als Funktionsgleichung,
- Wertepaare in einer Funktions- oder Wertetabelle,
- ein Schaubild (grafische Darstellung).

Als Schaubild ist eine Kennlinie (Graph, Schaulinie) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem bzw. Gitternetz gebräuchlich (**Tabellen 1 und 2**).

Bei der Erfahrungsfunktion (empirischen Funktion) ergibt sich die Wertetabelle aus einem Messversuch, bei der berechenbaren (analytischen) Funktion durch Rechnung mit einer Formel als Funktionsgleichung.

Beispiel 1: Erfahrungsfunktion $W(t)$

Die elektrische Arbeit W einer Heizung ist eine Funktion der Einschaltzeit t . Man kann zu gegebenen Zeiten t die zugeordneten Verbrauchswerte W messen. Die t - W -Wertepaare ergeben die Wertetabelle (**Tabelle 1**).

- Zeichnen Sie ein Gitternetz mit Werteskalen.
Maßstäbe:
Waagrecht (Abszisse) für t : 1 Teil \cong 1 h.
Senkrecht (Ordinate) für W : 1 Teil \cong 2 kWh.
- Markieren Sie für jedes t - W -Wertepaar der Wertetabelle einen Punkt im Koordinatensystem. Zeichnen Sie durch die Punkte eine Gerade als Kennlinie.
- Ermitteln Sie aus dem $W(t)$ -Schaubild zur Zeit $t_1 = 5$ h die Arbeit W_1 , zum Verbrauch $W_2 = 5,0$ kWh die Zeit t_2 .
- Ermitteln Sie die Steigung der $W(t)$ -Kennlinie.

Lösung: Tabelle 1 und Bild 1

Beispiel 2: Berechenbare Funktion $I(U)$

Gegeben sind die Funktionsgleichung $I = P/U$ für die Leistung $P = 16$ W, die Spannungen in der Wertetabelle (**Tabelle 2**) und ein Gitternetz mit Werteskalen (**Bild 2**).

- Berechnen Sie die zugeordneten Stromwerte. Tragen Sie die U - I -Wertepaare in eine Wertetabelle ein. Einheiten: Ampere gleich Watt durch Volt. $A = W/V$.
- Markieren Sie für jedes berechnete U - I -Wertepaar den Punkt im Koordinatensystem, und verbinden Sie die Punkte durch die $I(U)$ -Kennlinie.
- Ermitteln Sie aus dem $I(U)$ -Schaubild (**Bild 2**) zur Spannung $U_7 = 7,0$ V den Strom I_7 . Überprüfen Sie das Ergebnis durch Rechnung.

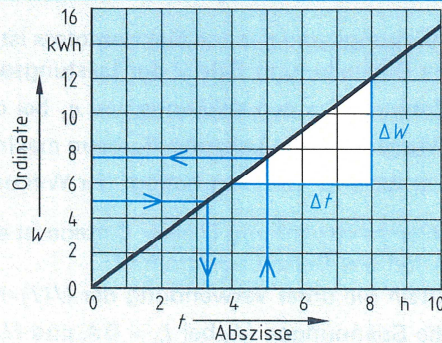
Lösung:

- Tabelle 2;** **b) Bild 2.**
- Schaubild:** $U_7 = 7,0$ V $\Rightarrow I_7 = 2,3$ A.
Rechnung: $I_7 = \frac{P}{U_7} = \frac{16 \text{ W}}{7,0 \text{ V}} = 2,3$ A

Tabelle 1: Erfahrungsfunktion, z. B. $W = f(t)$

$W(t)$ -Wertetabelle

t in h	0	2	4	6	8	10
W in kWh	0	3	6	9	12	15



$$t_1 = 5 \text{ h} \Rightarrow W_1 = 7,5 \text{ kWh}; W_2 = 5,0 \text{ kWh} \Rightarrow t_2 = 3,3 \text{ h.}$$

Bild 1: $W(t)$ -Kennlinie einer Heizung

Steigung:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{12,0 \text{ kWh} - 6,0 \text{ kWh}}{8,0 \text{ h} - 4,0 \text{ h}} = 1,5 \text{ kW}$$



Steigung gleich Ordinatenabschnitt (z. B. ΔW) durch Abszissenabschnitt (z. B. Δt).

Tabelle 2: Berechenbare Funktion, z. B.: $I = f(U)$

Funktionsgleichung: $I = \frac{P}{U}$ für $P = 16$ W

$I(U)$ -Wertetabelle

U in V	2	4	6	8	10	12	14	16	20
I in A	8	4	2,7	2	1,6	1,3	1,1	1	0,8

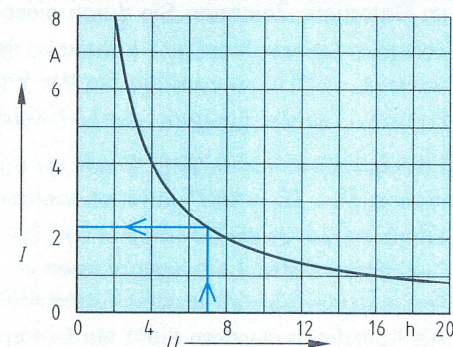


Bild 2: $I(U)$ -Kennlinie (Leistungshyperbel) für $P = 16$ W



Die $I(U)$ -Kennlinie eines Widerstandes für $P = \text{konstant}$ ist eine Leistungshyperbel

Exercices:

- Die Entladekennlinie in **Bild 1** zeigt die Klemmenspannung U einer Batterie als Funktion der Entladezeit t .
 - Welchen Wert U_1 hat die Spannung nach der Zeit $t_1 = 16$ h?
 - Nach welcher Zeit t_2 beträgt die Spannung $U_2 = 12$ V?
- Der Wirkungsgrad η eines Elektromotors ist entsprechend der grafischen Darstellung in **Bild 2** der Leistungsabgabe P zugeordnet.
 - Ermitteln Sie den Wirkungsgrad η_1 bei der Leistung $P_1 = 50$ W.
 - Wie groß ist die Leistung P_m beim maximalen Wirkungsgrad η_m ?
 - Bei welcher Leistung beträgt der Wirkungsgrad $\eta_2 = 0,7$?
- Die Klemmenspannung U einer Batterie ist entsprechend **Bild 3** eine Funktion des Belastungsstroms I . Ermitteln Sie unter Verwendung der $U(I)$ -Kennlinie
 - die Spannungen U_0 bei $I_0 = 0$ A und U_1 bei $I_1 = 0,5$ A,
 - die Ströme I_2 bei $U_2 = 3,7$ V und I_3 bei $U_3 = 2,5$ V,
 - die Steigung (Betrag) der $U(I)$ -Kennlinie.
- Eine Reihenschaltung aus Widerstand und Kondensator (R-C-Glied) wird an die konstante Spannung $U_0 = 60$ V gelegt. Die Kondensatorspannung verläuft dann nach einer e -Funktion (**Bild 4**).
 - Ermitteln Sie aus dem Schaubild die Spannungen U_{C1} nach $t_1 = 10$ s und U_{C2} nach $t_2 = 20$ s,
 - Nach welcher Zeit t_3 (Zeitkonstante τ), hat die Kondensatorspannung den Wert $U_{C3} = 0,63 \cdot U_0$?
- Gegeben ist das Ohmsche Gesetz in der Form $I = U/R$. Dabei ist der Strom I eine Funktion der Spannung U beim Widerstand $R = 20 \Omega$.
 - Berechnen Sie die den Spannungen 0, 10 V, 20 V, 30 V, 40 V, 50 V, 60 V zugeordneten Ströme.
 - Legen Sie für die ermittelten U - I -Wertepaare eine Wertetabelle an.
 - Als Koordinatensystem dient ein Gitternetz mit Werteskalen.
Maßstäbe: Waagrecht (Abszisse) für U : 1 Teil = 1 div $\triangleq 10$ V.
Senkrecht (Ordinate) für I : 1 Teil = 1 div $\triangleq 0,5$ A.
 - Markieren Sie für jedes U - I -Wertepaar aus der Tabelle einen Punkt im Gitternetz. Zeichnen Sie durch diese Punkte eine Kennlinie.
 - Ermitteln Sie aus dem $I(U)$ -Schaubild den Strom I_1 bei der Spannung $U_1 = 25$ V. Überprüfen Sie das Ergebnis durch Rechnung.
 - Ermitteln Sie die Steigung der U - I -Kennlinie (Leitwert).
- Mithilfe der Kennlinie in **Bild 3** soll als Funktion des Stroms I die Spannung $U_i = U_0 - U(I)$ ermittelt werden. Dabei ist $U_0 = 4,5$ V.
 - Ermitteln Sie für die Ströme $I = 0$ A, 0,2 A, 0,4 A, ..., 1,0 A, 1,2 A mithilfe von **Bild 3** die Spannungen U_i . Tragen Sie die gefundenen I - U_i -Wertepaare in eine Wertetabelle ein.
 - Als Koordinatensystem dient ein Gitternetz mit Werteskalen.
Maßstäbe: Waagrecht (Abszisse) für I : 1 Teil = 1 div $\triangleq 0,2$ A.
Senkrecht (Ordinate) für U_i : 1 Teil = 1 div $\triangleq 0,5$ V.
 - Zeichnen Sie in das Gitternetz die $U_i(I)$ -Kennlinie.
 - Ermitteln Sie die Steigung der $U_i(I)$ -Kennlinie.

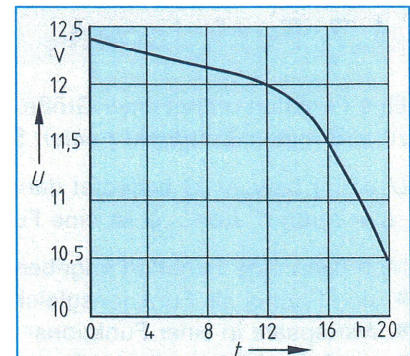


Bild 1: Entladekennlinie $U(t)$ einer Batterie

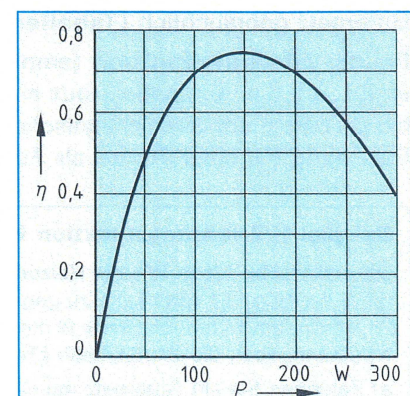


Bild 2: Wirkungsgrad $\eta(P)$ eines Elektromotors

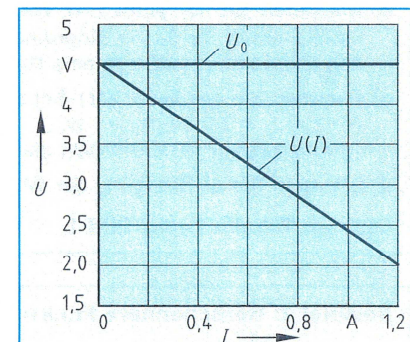


Bild 3: Belastungskennlinie $U(I)$ einer Batterie

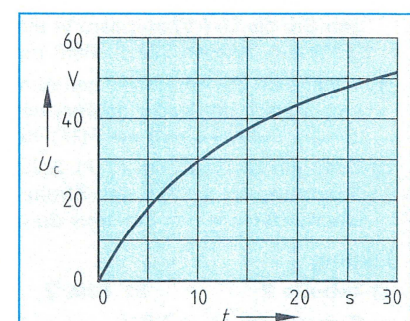


Bild 4: Ladekennlinie $U_C(t)$ eines Kondensators