

INFORMATIQUE DU BÂTIMENT

Mathématiques 1er semestre

Opérations de base





Table des matières

1 Bases.....	2
1.1 Nombres.....	2
1.1.1 Nombres naturels	2
Les nombres que l'on utilise pour compter sont appelés nombres naturels. Tous les nombres entiers positifs sont des nombres naturels.....	2
1.1.2 Nombres entiers	2
1.1.3 Nombres rationnels	2
1.1.4 Nombres irrationnels	3
1.1.5 Nombres réels.....	3
1.1.6 Nombres définis et indéfinis.....	3
.....	4
2 Pourcentage, pour mille et ppm.....	4
2.1 Pourcentage comme rapport entre deux grandeurs	4
2.2 Pour mille et ppm.....	4
2.3 Calculer avec des pourcentages	4
2.3.1 Exercice: calculer avec des pourcentages.....	5
3 Élever à la puissance.....	6
3.1 Généralités	6
3.2 Signes algébriques.....	6
3.3 Addition et soustraction de puissances	7
3.4 Multiplication de puissances	7
3.5 Division de puissances.....	8
3.6 Élever des puissances à une puissance	9
3.7 Élever des sommes à la puissance.....	10
3.8 Exercices: élever à la puissance.....	12
4 Extraire la racine	15
4.1 Généralités	15
4.2 Extraire la racine de nombres	15
4.3 Addition et soustraction de racines.....	16
4.4 Extraire la racine de produits.....	17
4.5 Extraire la racine de quotients	18
4.6 Extraire la racine de puissances	19
4.7 Extraire la racine de racines	21
4.8 Exercices: extraire la racine	22



1 Bases

1.1 Nombres

1.1.1 Nombres naturels

Les nombres que l'on utilise pour compter sont appelés nombres naturels. Tous les nombres entiers positifs sont des nombres naturels.

1, 2, 3, 4, *nombres naturels*

1, 2, 3, 4, *nombres entiers positifs*

1.1.2 Nombres entiers

Les nombres positifs et négatifs forment ensemble les nombres entiers. Le zéro sépare les nombres positifs des nombres négatifs.

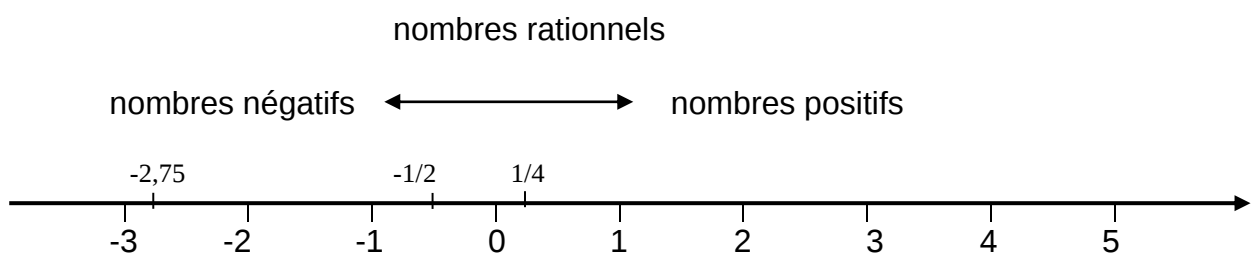
nombres négatifs **zéro** **nombres positifs**

... , -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...

nombres entiers

1.1.3 Nombres rationnels

Les nombres entiers positifs et négatifs, les fractions et le zéro forment ensemble les nombres rationnels.



droite numérique avec nombres rationnels



1.1.4 Nombres irrationnels

Si l'on souhaite formuler $\sqrt{2}$ sous forme de fraction décimale, alors on se rend compte que $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction finie, ni une fraction infinie-périodique. On peut uniquement, en fonction du nombre de chiffres après la virgule, indiquer avec plus ou moins de précision, entre quelles limites $\sqrt{2}$ doit se trouver:

$$1,4142135624 < \sqrt{2} < 1,4142135625$$

Ce nouveau type de nombres est appelé nombres irrationnels

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, e , π , *nombres irrationnels*

1.1.5 Nombres réels

Les nombres rationnels et irrationnels forment ensemble les *nombres réels*.

± 3	$\pm \frac{2}{3}$	$\pm \sqrt{2}$, $\pm \pi$, $\pm e$
Nombres entiers	Fractions décimales	Nombres irrationnels
Nombres rationnels		
Nombres réels		

1.1.6 Nombres définis et indéfinis

Les nombres et les grandeurs qui ont une certaine valeur sont appelés *nombres définis*:

Nombres définis	
0; 1; 12; $\frac{1}{2}$; 3,5	3kg; 2Fr; 3cm ²
Nombres	Grandeurs

Les variables et autres symboles par contre sont représentatives des nombres définis.

Pour mémoire:

Les variables en tant que telles ne sont pas des nombres. Des chiffres peuvent être utilisés à leur place. Toutes les règles de calcul avec des variables se réfèrent toujours aux nombres qu'elles représentent.



2 Pourcentage, pour mille et ppm

2.1 Pourcentage comme rapport entre deux grandeurs

Dans les calculs de pourcentages, on procède à une comparaison. Pour ce faire, un nombre de référence (valeur de base) est fixé à 100 et les chiffres à comparer (pourcentages) sont rapportés à 100. Ces fractions dont le dénominateur est 100 ont obtenu la désignation pourcentage et le signe %.

$$\frac{\text{Pourcentage}}{100} = \frac{\text{valeur de pourcentage}}{\text{valeur de base}}$$

$$\frac{p}{100} = \frac{b}{a}$$

a = valeur de base/valeur totale
b = valeur de pourcentage/partielle
p = pourcentage

2.2 Pour mille et ppm

- Pour les calculs de *pour mille*, le nombre de référence est égal à 1000.
- Pour les calculs en ppm, on se réfère à un million.
(ppm = parts per million)

2.3 Calculer avec des pourcentages

Exemple:

Deux récipients ont une capacité de 5m³ et 10m³, mais contiennent 3m³ et 4m³ de liquide. Le récipient de 10m³ contient certes plus de liquide, mais il est proportionnellement moins bien exploité. Calcule le taux d'utilisation en pourcentage.

donné: a) valeur totale: 5m³
 valeur partielle: 3m³
 b) valeur totale: 10m³
 valeur partielle: 4m³

recherché: pourcentage

$$a) \quad p = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 3}{5} = \underline{\underline{60\%}}$$

$$b) \quad p = \frac{100 \cdot b}{a} = \frac{100 \cdot 4}{10} = \underline{\underline{40\%}}$$



2.3.1 Exercice: calculer avec des pourcentages

- 1) Une entreprise emploie 300 femmes parmi ces 1500 collaborateurs. Quel est le pourcentage de femmes parmi l'effectif?

$$p = \frac{100 * b}{a} = \frac{100 * 300}{1500} = \underline{20\%}$$

- 2) Combien de kilogrammes de titane sont contenus dans 275 kg d'un alliage d'acier, si la teneur en titane est de 4%?

$$b = \frac{p * a}{100} = \frac{4 * 275}{100} = \underline{11kg}$$

- 3) Le rendement laitier moyen de 2800 kg par vache a augmenté de 8% au cours d'une année. Quelle est l'augmentation en kg?

$$b = \frac{p * a}{100} = \frac{8 * 2800}{100} = \underline{224kg}$$

- 4) Une meilleure planification permet de réduire de 48 000 francs, soit de 12%, les coûts de transport des briques en un trimestre. Quels sont les coûts de transport avant et après l'optimisation?

Coûts du transport avant optimisation

$$a = \frac{100 * b}{p} = \frac{100 * 48'000}{12} = \underline{400'000 \text{ Fr.}}$$

Coûts du transport après optimisation

$$\underline{400'000 \text{ Fr.} - 48'000 \text{ Fr.} = 352'000 \text{ Fr.}}$$

- 5) Un objet est produit à 3600 exemplaires par an. Par rapport à l'année précédente, la production a augmenté de 120%. Combien de pièces ont été fabriquées l'année dernière?

$$a = \frac{100 * b}{p} = \frac{100 * 3600}{120} = \underline{3000 \text{ pièces}}$$



3 Élever à la puissance

3.1 Généralités

Si un produit est composé de facteurs identiques, on l'exprime en abrégé sous forme de puissance. L'exposant indique le nombre de fois que la base doit être définie comme facteur.

$$\begin{array}{l} \text{Exposant} \\ a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{n \text{ facteurs}} \\ \text{Base} \end{array}$$

Cas spéciaux:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a \neq 0$$

3.2 Signes algébriques

- Si la base est positive, la valeur de la puissance est toujours positive.
- Si la base est négative et l'exposant un nombre pair, la valeur de la puissance est positive.
- Si la base est négative et l'exposant un nombre impair, la valeur de la puissance est négative.

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} (-a)^{2n} = a^{2n} \\ (-a)^{2n-1} = -a^{2n-1} \end{array} \right\} \text{ pour } a > 0 \text{ et } 2n \rightarrow \text{nombre pair}$$

Exercices: voir chap. 3.8, ex. 1-5 (Kusch p.137/8.2)



3.3 Addition et soustraction de puissances

Les puissances sont additionnées ou soustraites, par addition ou soustraction de leurs coefficients:

$$3a^6 + 5a^6 = 8a^6 \quad (\text{puissance identique})$$

$$4a^5 - 4a^4 = 4a^4(a-1) \quad (\text{puissance différente})$$

$$7b^3 + 7a^3 = 7(b^3+a^3) \quad (\text{puissance différente})$$

On ne peut additionner ou soustraire que des puissances ayant les mêmes exposants et les mêmes bases.

Exemple:

$$30a^2b^3 + 6a^3b^2 + 4a^3b^2 + 2a^3c^2 - 12a^2b^3 = \underline{10a^3b^2 + 18a^2b^3 + 2a^3c^2}$$

Exercices: voir chap. 3.8, ex. 6-9 (Kusch p.144 1-25)

3.4 Multiplication de puissances

- Multiplication de puissances avec bases identiques:

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$m, n \rightarrow$ nombres naturels

- Multiplication de puissances avec exposants identiques:

$$a^n * b^n = (a * b)^n$$

$n \rightarrow$ nombre naturel

Exemples:

$$1) \quad 2a^3x^7 * 3a^4x = \underline{2 * 3 * a^3 * a^4 * x^7 * x^1 = 6a^7x^8}$$

$$2) \quad (5mn)^3 = \underline{125m^3n^3 = 125(mn)^3}$$

$$3) \quad b^{3-x} * b^{x+n} = \underline{b^{3-x+x+n} = b^{3+n}}$$

Exercices: voir chap. 3.8, ex. 10-14 (Kusch p.144/145 26-46)

3.5 Division de puissances

- Division de puissances avec bases identiques:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \begin{array}{l} m, n \rightarrow nb \text{ nat.} \\ a \neq 0 \end{array}$$

- Division de puissances avec exposants identiques:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \quad \begin{array}{l} n \rightarrow nb \text{ nat.} \\ b \neq 0 \end{array}$$

- Une puissance avec un exposant négatif est égale à l'inverse de la même puissance avec un exposant positif:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad \begin{array}{l} b \rightarrow nb \text{ nat.} \\ a \neq 0 \end{array}$$

Exemples:

$$1) \quad \frac{15a^3b^4c^7}{3ab^5c^6} = \frac{5a^2c}{b}$$

$$2) \quad \frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0 = \underline{1} \quad (x \neq 0)$$

$$3) \quad \frac{a^m}{a^{n-p}} = a^{m-(n-p)} = \underline{a^{m-n+p}}$$

$$4) \quad \frac{b^{n+1} * c^x}{b^n * c^{x-1}} = b^{n+1-n} * c^{x-(x-1)} = \underline{bc}$$

$$5) \quad \frac{z^{-2} * x^4 * y^{-6}}{b^3 * c^{-4} * d^{-5}} : \frac{z^{-3} * b^{-3} * x^3}{c^{-5} * y^6 * d^{-6}} = \frac{x^4 * c^4 * d^5}{z^2 * y^6 * b^3} : \frac{x^3 * c^5 * d^6}{y^6 * z^3 * b^3} = \frac{x^4 * c^4 * d^5 * y^6 * z^3 * b^3}{z^2 * y^6 * b^3 * x^3 * c^5 * d^6} = \underline{\frac{xz}{cd}}$$

Exercices: voir chap. 3.8, ex. 15-20 (Kusch p.145 47-76)



3.6 Élever des puissances à une puissance

On élève une puissance à une puissance en élevant la base à une puissance égale au produit des exposants:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad m, n \rightarrow \text{nb nat.}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad m, n \rightarrow \text{nb nat.}$$

⇒ Les exposants peuvent être intervertis:

Exemples:

$$1) \quad \left(\frac{5x^2}{2y^3} \right)^3 = \frac{5^3 x^6}{2^3 y^9} = \frac{125x^6}{8y^9}$$

$$2) \quad ((3a^3b^4)^2)^3 = (3^2 a^6 b^8)^3 = 3^6 a^{18} b^{24} = 729a^{18}b^{24}$$

$$3) \quad (a^3)^4 = a^{(3^4)} ? \quad \underline{\text{Non}}$$

$$(a^3)^4 = \underline{a^{12}}$$

$$a^{(3^4)} = \underline{a^{81}}$$

⇒ La parenthèse détermine l'ordre!

Exercices: voir chap. 3.8, ex. 21-24 (Kusch p.145/146 76-116)



3.7 Élever des sommes à la puissance

Les sommes ou les différences sont élevées à une puissance en transformant la puissance en produit et en calculant les parenthèses ainsi formées.
(somme algébrique de deux éléments: binôme)

Exemples:

$$1) (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$2) (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = \underline{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\begin{aligned} 3) (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= \underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (a - b)^4 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^4 - 2a^3b + a^2b^2 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\ &= \underline{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (a + b)^4 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 \\ &= \underline{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4} \end{aligned}$$

Le type $(a \pm b)^n$ peut être facilement décomposé à l'aide du triangle de Pascal!

Lois générales:

- Chaque ligne commence et se termine par un 1.
- Les coefficients des différents opérandes $(a \pm b)^n$ forment une ligne dans le triangle de Pascal.
- La ligne suivante s'obtient par addition des coefficients de la ligne située au-dessus.
- Classés par puissances décroissantes du premier terme (a) et par puissances croissantes du second terme (b).
- La somme des exposants de a et b est pour chaque opérande égale à (n).
- Si le binôme est une différence, les signes algébriques changent. Le premier terme a toujours un signe positif.

[illegible]

$$(a + b)^n$$

$$a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$



3.8 Exercices: élever à la puissance

Le signe algébrique lorsqu'on élève à la puissance:

- | | | | |
|----|--|---|--------|
| 1) | $(-bx)^3 =$ | $-b^3x^3$ | Ex. 2 |
| 2) | $(-abx)^6 =$ | $a^6b^6x^6$ | Ex. 4 |
| 3) | $\left(-3\frac{b}{x}\right)^3 =$ | $-27\frac{b^3}{x^3}$ | Ex. 7 |
| 4) | $\left(-\frac{1}{2ab}\right)^5 =$ | $-\frac{1}{32a^5b^5}$ | Ex. 10 |
| 5) | $10\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 16\left(-\frac{1}{9}\right)^2 - 10\left(-\frac{1}{3}\right)^4 =$ | $\frac{40}{9} + \frac{40}{27} + \frac{16}{81} - \frac{10}{81} = \frac{486}{81} = 6$ | Ex. 11 |

Kusch chap. 8. Pages 144-146

Décomposer en facteurs:

- | | | | |
|----|-----------------------------|------------------------------|--------|
| 6) | $a^2 + 12a + 36 =$ | $(a + 6)(a + 6) = (a + 6)^2$ | Ex. 1 |
| 7) | $x^2 - 4 =$ | $(x + 2)(x - 2)$ | Ex. 7 |
| 8) | $a^4 - 1 =$ | $(a^2 + 1)(a^2 - 1)$ | Ex. 12 |
| 9) | $(x + 2y)^2 - (3x + y)^2 =$ | $(4x + 3y)(y - 2x)$ | Ex. 16 |

Multiplier et diviser des puissances:

- | | | | |
|-----|--|------------------------|--------|
| 10) | $-(-2ab^2)*(-3a^2b) =$ | $-6a^3b^3$ | Ex. 33 |
| 11) | $(-x^5)*(-x^4)*(a^2)^2 =$ | x^9a^4 | Ex. 34 |
| 12) | $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2} =$ | $\frac{x + y}{x - 3y}$ | Ex. 39 |



13) $(x^2 + 3x - 3) : (x - 1) =$

$$x + 4 + \frac{1}{x - 1}$$

Ex. 41

14) $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - y^2} * \frac{x - y}{x + 2y} =$

$$\frac{x - 2y}{x + y}$$

Ex. 44

15) $\frac{c^{3a-b}}{y^{2a-3b}} : \frac{c^{2a-3b}}{y^{3a-2b}} =$

$$c^{a+2b} * y^{a+b}$$

Ex. 52

16) $\left(3\frac{3}{4} * x^{2m-3} - 3x^{3m-2} + 1\frac{1}{2} * x^{m+4} \right) : \frac{3}{4} * x^{m-1} =$

$$5x^{m-2} - 4x^{2m-1} + 2x^5$$

Ex. 54

17) $\frac{a^0 * b^0}{c^0} =$

$$1$$

Ex. 70

18) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} =$

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Ex. 93

19) $a + b + \frac{b^2}{a-b} =$

$$\frac{a^2}{a-b}$$

Ex. 100

20) $\frac{3xy - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \div \frac{y^2}{x-y} + \frac{x-3y}{x^2 - y^2} * \frac{2x+2y}{2x} =$

$$\frac{3(x+y)}{xy}$$

Ex. 116

Élever des puissances à une puissance

21) $(x^{-2})^3 =$

$$x^{-6}$$

Ex. 77

22) $(-x^{-2})^3 =$

$$-x^{-6}$$

Ex. 78



$$23) \frac{5}{3}x^{-4}y^3z : \frac{5}{6}x^{-6}y^{-5}z^3 =$$

$$2x^2y^8z^{-2}$$

Ex. 81

$$24) (2x^{-1} - 3y)^2 =$$

$$x^{-2}$$

Ex. 85

Tous les exercices et toutes solutions de Kusch p. 144-146

Vermischte Aufgaben zur Wiederholung von 8.

Verwandeln Sie in ein Produkt (Nr. 1...25):

1. $a^2 + 12a + 36 = \underline{\underline{(a + 6) \cdot (a + 6)}}$
2. $4x^2 + 12x + 9$
3. $9b^4 - 12b^2c^2 + 4c^4$
4. $1 - 6xy + 9x^2y^2$
5. $4a^4 + 4a^2 + 1$
6. $ax^2 + 6ax + 9a$
7. $x^2 - 4$
8. $25b^2 - 4c^2$
9. $\frac{1}{4} - x^2$
10. $\frac{a^2}{16} - 1$
11. $\frac{x^2}{25} - \frac{1}{a^2}$
12. $a^4 - 1$
13. $3a^2b - 12b^3$
14. $(a - b)^2 - c^2$
15. $64 - (a - 2b)^2$
16. $(x + 2y)^2 - (3x + y)^2$
17. $1 - x^3 - 6xy - 9y^2$
18. $2ab - a^2 - b^2 + c^2$
19. $3a^2 + 11a + 6$
20. $5x^2 + 12x + 4$
21. $3b^2 - 10b + 3$
22. $3a^2 - 2a - 5$
23. $2x^2 - x - 28$
24. $3(x + y)^2 + 11(x + y) + 6$
25. $\frac{9a^2z^2}{x^2} - \frac{18abz^2}{xy} + \frac{9b^2z^2}{y^2} - \frac{4a^4}{x^2} + \frac{8a^3b}{xy} - \frac{4a^2b^2}{y^2}$
26. $(-2a) \cdot (-1) = \underline{\underline{2a}}$
27. $(-1) \cdot (-2)$
28. $-(-2x)^2 \cdot (-3)^2$
29. $-(1)^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-3)$
30. $(-2x)^2 \cdot (-3)^2 \cdot 4$
31. $(-b)^3 \cdot (-2b)^2 \cdot (3x)$
32. $(-2ab) \cdot (6b^3)$
33. $-(-2ab^2) \cdot (-3a^2b)$
34. $(-x^6) \cdot (-x^4) \cdot (a^5)^2$
35. $\frac{3a^2bc}{9ab^2c} = \underline{\underline{\frac{a}{3b}}}$
36. $\frac{x^2b - xb}{x^2b + xb}$
37. $\frac{x - 2y}{x^2 - 2xy}$
38. $\frac{6x - 3x^2}{6x + 3x^2}$
39. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$

40. $(x^2 - 3xy - 9y^2) : (x + 2y)$
41. $(x^2 + 3x - 3) : (x - 1)$
42. $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{9y^2}{10x^2}$
43. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{bx}{x + b}$
44. $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x - y}{x + 2y}$
45. $\frac{a + 2}{a^2 - a} \cdot \frac{a^2 - 5a}{a^2 + 8a + 12}$
46. $\frac{1}{\pi v - \pi h} \cdot \frac{\pi v^2 - \pi v h}{v + h}$
47. $\frac{3a^2}{5y} : \frac{9a^3}{15y^2} = \frac{3a^2 \cdot 15y^2}{5y \cdot 9a^3} = \frac{y}{a}$
48. $\frac{7}{a^2 - b^2} : \frac{14}{a - b}$
49. $\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) : \left(\frac{x}{y} + 1\right)$
50. $\frac{xy}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^2 + 2xy}{x^2 - y^2}$
51. $\frac{6x^4b^3}{5a^2y^4} : \left(-\frac{5xb^3}{9a^2y}\right)$
52. $\frac{c^{3a-b}}{y^{2a-3b}} : \frac{c^{2a-3b}}{y^{3a-2b}}$
53. $\frac{48a^{2x-3y}}{98x^{3a-2b}} : \frac{18a^{x-3y}}{35x^{3a-2b}}$
54. $\left(3\frac{3}{4}x^{2m-3} - 3x^{3m-2} + 1\frac{1}{2}x^{m+4}\right) : \frac{3}{4}x^{m-1}$
55. $(a^2 + b^5) : (a + b)$
56. $\frac{16x^4 - 9b^4 + 30b^2c - 25c^2}{4x^2 - 3b^2 + 5c}$
57. $x^{m-3} \cdot x^{5-m} \cdot x^{2m-2}$
58. $5x(2x^2 - 3xy - 4y^2)$
59. $(a + b)^2 \cdot (a + b)^3 \cdot (a + b)$
60. $16\frac{1}{4}a^2b^2 \cdot (12a^2 - 28ab + 32b^2)$
61. $(10a^2 - 7ab + 8b^2) \cdot (3a^2 - 8b^2)$
62. $\left(\frac{x-y}{a+b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^3$
63. $\left(\frac{24ab}{25c}\right)^4 : \left(\frac{16a^2}{5bc}\right)^2$
64. $(x^2y^3)^2 \cdot (x^3y^2)^2$
65. $(x^2y^2)^4 : (x^2y^2)^3$
66. $\left(\frac{7a^{n+1}b^n}{8c^{2n-2}}\right)^5 : \left(\frac{35a^4b^3}{24c^4}\right)^n$
67. $(0,4a^3 - 0,5b^3)^2$
68. $\left(\frac{3x^2y^3}{4z^3} - \frac{8z^2}{9x^3y^2}\right)^2$
69. $\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{3}y^2\right)^2$
70. $\frac{a^0 \cdot b^0}{c^0}$
71. $19,5 \cdot \frac{a^0 \cdot x^0}{y^0}$
72. $\frac{b^0}{x^a \cdot y^a}$
73. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
74. $\frac{1}{3^{-2}}$
75. $\frac{2^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}}$
76. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$
77. $(x^{-2})^3$
78. $(-x^{-2})^3$
79. $(-x^2)^{-3}$
80. $(-x^{-n})^{-3}$
81. $\frac{5}{3}x^{-4}y^3z : \frac{5}{6}x^{-6}y^{-5}z^3$
82. $-\left(\frac{-3xy^3}{4x}\right)^3$
83. $-\frac{10x^{-a}y^bz^2}{16d^{-3}} : 10x^by^{-a}z^4d^4$
84. $\left(\frac{a^{-4}y^3}{x^2b^{-3}c^0}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^{-3}y^2c^0}{x^{-1}b^{-4}}\right)^2$
85. $(2x^{-1} - 3y)^2$
86. $(2a^{-1} - 3b^{-1})^2$
87. $\left(\frac{x^{2n-3}}{y^{n+2}} : \frac{a^{3n+1}}{b^{2n-5}}\right) : \left(\frac{x^{2n+1}}{y^{n+4}} : \frac{a^{3n-2}}{b^{2n+1}}\right)$
88. $(125a^3b^9)^{n+1} : (5a^nb^{3n-1})^3$



$$89. \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = \frac{3y}{xy} + \frac{4x}{xy} - \frac{y}{xy} = \frac{2y+4x}{xy}$$

$$90. \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

$$91. \frac{x}{5} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5}$$

$$92. \frac{x}{3} - \frac{x-2}{4}$$

$$93. \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$$

$$94. \frac{3a}{2b-6} + \frac{4a}{3b-9}$$

$$95. \frac{3a^2+1}{a^2+3a} - \frac{2a+1}{a+3}$$

$$96. \frac{2x+1}{x^2-x} - \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$97. \frac{2a-3}{2a-4} - \frac{a-5}{3a-6}$$

$$98. \frac{a^2-5}{a^2-4} - \frac{a+1}{a-2} + \frac{a-1}{a+2}$$

$$99. \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2-4x+3} - \frac{5}{x^2-5x+6}$$

$$100. a + b + \frac{b^2}{a-b}$$

$$101. a - b - \frac{a^2}{a+b}$$

$$102. \frac{a^2+2a-1}{a+1} - (a+1)$$

$$103. x - 3 + \frac{1-x^2}{x+3}$$

$$104. \frac{a + \frac{a}{b}}{1 + \frac{1}{b}}$$

$$105. \frac{x^2-y^2}{xy} : \frac{x-y}{x^2}$$

$$106. \frac{a^5+2}{2a^9} - \frac{3-a^6}{3a^{10}} - \frac{(2a-1)^2}{4a^{11}}$$

$$107. \frac{2a^{n+1}+3a^6+2a^5+1}{2a^{n+2}} - \frac{2a^{n-4}+3}{3a^{n-3}} - \frac{2a^{n-5}+9}{6a^{n-4}}$$

$$108. \left(\frac{24(a-b)}{12} : 2 \right) + \frac{14(a-b)}{7}$$

$$109. \frac{x^2-y^2}{(x-y) \cdot x} + \frac{x^2-y^2}{(x+y) \cdot x}$$

$$110. \frac{36x^2y-48xy^2}{4(x+y)} + \frac{45x^2y+60xy^2}{5(x+y)}$$

$$111. \left[(a^2-b^2) : \frac{a+b}{x} \right] + \left[(a^2-b^2) : \frac{a-b}{x} \right]$$

$$112. \left[\frac{(x-y)^8}{(a+b)^6} : \frac{(x-y)^8}{(a+b)^4} \right] - \left[\frac{(a+b)^6}{(x-y)^4} : \frac{(a+b)^3}{(x-y)^2} \right]$$

$$113. \frac{2x^2-2x-4}{15x^2+15x-30} : \frac{9x^2+18x+9}{10x^2-20x+10}$$

$$114. \frac{a^2-a}{a^2+2a} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-1} : \frac{a^2+2a+1}{a^2-4a+4}$$

$$115. \frac{4x^2-4xy}{6xy+6y^2} : \left(\frac{3x^2-3xy}{4x^3+8x^2y+4xy^2} : \frac{2x^2-8xy+8y^2}{16x^3+16x^2y} \right)$$

$$116. \frac{3xy-y^2}{x^2-2xy+y^2} : \frac{y^2}{x-y} + \frac{x-3y}{x^2-y^2} \cdot \frac{2x+2y}{2x}$$

146



Solutions

1. $(a + 6) \cdot (a + 6)$
2. $(2x + 3) \cdot (2x + 3)$
3. $(3b^2 - 2c^2) \cdot (3b^2 - 2c^2)$
4. $(1 - 3xy) \cdot (1 - 3xy)$
5. $(2a^2 + 1) \cdot (2a^2 + 1)$
6. $a(x + 3)(x + 3)$
7. $(x - 2) \cdot (x + 2)$
8. $(5b - 2c) \cdot (5b + 2c)$
9. $\left(\frac{1}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)$
10. $\left(\frac{a}{4} + 1\right) \cdot \left(\frac{a}{4} - 1\right)$
11. $\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{a}\right)$
12. $(a^2 + 1) \cdot (a^2 - 1)$
13. $3b(a + 2b) \cdot (a - 2b)$
14. $(a - b + c) \cdot (a - b - c)$
15. $(8 + a - 2b) \cdot (8 - a + 2b)$
16. $(4x + 3y) \cdot (y - 2x)$
17. $(1 + x + 3y) \cdot (1 - x - 3y)$
18. $(c - a + b) \cdot (c + a - b)$
19. $(a + 3) \cdot (3a + 2)$
20. $(5x + 2) \cdot (x + 2)$
21. $(3b - 1) \cdot (b - 3)$
22. $(3a - 5) \cdot (a + 1)$
23. $(2x + 7) \cdot (x - 4)$
24. $(x + y + 3) \cdot (3x + 3y + 2)$
25. $(9x^2 - 4a^2) \cdot \left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right)^2$

26



$$\begin{array}{llll}
26. 2a & 30. 144x^3 & 35. \frac{a}{3b} & 38. \frac{2-x}{2+x} \\
27. 2 & 31. -12b^3x & 36. \frac{x-1}{x+1} & 40. x-5y+\frac{y^2}{x+2y} \\
28. 72x^3 & 32. -12ab^4 & 39. \frac{x+y}{x-3y} & 41. x+4+\frac{1}{x-1} \\
29. -24 & 33. -6a^3b^3 & 37. \frac{1}{x} & \\
& 34. a^4x^9 & & \\
42. \frac{3y}{5x} & 43. \frac{b}{x(x+b)} & 44. \frac{x-2y}{x+y} & 45. \frac{a-5}{(a+6)(a-1)} \\
& & & 46. \frac{v}{(v+h)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
47. \frac{y}{a} & 50. \frac{(x-y) \cdot y}{(x+y) \cdot (x+2y)} & 53. \frac{20}{21}a^x \\
48. \frac{1}{2(a+b)} & 51. -\frac{54bx^3}{25y^3} & 54. 5x^{m-2} - 4x^{2m-1} + 2x^5 \\
49. \frac{y-x}{y} & 52. c^{a+2b} \cdot y^{a+b} & 55. a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
& & 56. 4x^2 + 3b^2 - 5c
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
57. x^{2m} & 63. \frac{81b^3c}{32000a} \\
58. 10x^3 - 15x^2y - 20xy^2 & 64. (xy)^{10} \\
59. (a+b)^4 & 65. (xy)^2 \\
60. 195a^4b^2 - 455a^3b^3 - 520a^2b^4 & 66. \frac{7^5 \cdot 24^n \cdot a^n + 5 \cdot b^{2n}}{8^5 \cdot 35^n \cdot c^{6n-10}} \\
61. 30a^4 - 21a^3b - 56a^2b^2 + 56ab^3 - 64b^4 & 67. 0,16a^6 - 0,4a^3b^3 + 0,25b^4 \\
62. \left(\frac{a-b}{x+y}\right)^3 & 68. \frac{9x^4y^6}{16z^8} - \frac{4y}{3xz} + \frac{64z^4}{81x^6y^4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
69. \frac{9}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^3y - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{9}y^4 & 77. \frac{1}{x^6} & 83. -\frac{y^ay^bz}{16d^ax^ax^b} \\
70. 1 & 78. -\frac{1}{x^6} & 84. \frac{a^3b^2x^6}{y^2} \\
71. 19,5 & 79. -\frac{1}{x^6} & 85. \frac{4}{x^2} - \frac{12y}{x} + 9y^2 \\
72. \frac{1}{x^a \cdot y^a} & 80. -x^6 & 86. \frac{4}{a^2} - \frac{12}{ab} + \frac{9}{b^2} \\
73. 16 & 81. \frac{2x^2y^3}{z^2} & 87. \frac{y^2}{a^3b^4x^4} \\
74. 9 & 82. \frac{27}{64}y^3 & 88. 125^n a^3b^{12} \\
75. \frac{1}{4} & & \\
76. \frac{7^3}{3^3 \cdot 2^3} = \left(\frac{7}{6}\right)^3 = 1\frac{127}{216} & &
\end{array}$$



89. $\frac{2y + 4x}{xy}$	94. $\frac{17a}{6(b-3)}$	99. $-\frac{7}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}$
90. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$	95. $\frac{3a^2 + 1}{a^2 + 3a} - \frac{2a + 1}{a + 3} = \frac{a^2 - a + 1}{a(a+3)}$	100. $\frac{a^2}{a-b}$
91. $\frac{22x}{15}$	96. $\frac{x^2 + x + 1}{x(x+1) \cdot (x-1)}$	101. $-\frac{b^2}{a+b}$
92. $\frac{x+6}{12}$	97. $\frac{4a+1}{6(a-2)}$	102. $-\frac{2}{a+1}$
93. $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$	98. $\frac{a^2 - 6a - 5}{a^2 - 4}$	
103. $-\frac{8}{x+3}$	108. $3a - 3b$	113. $\frac{4(x-2) \cdot (x-1)}{27(x+2) \cdot (x+1)}$
104. a	109. 2	114. $\left(\frac{a-2}{a+1}\right)^3$
105. $\frac{x(x+y)}{y}$	110. $\frac{18x^2y}{x+y}$	115. $\frac{(x-2y)^2}{9xy}$
106. $\frac{10a^7 - 3}{12a^{11}}$	111. $2ax$	116. $\frac{3(x+y)}{xy}$
107. $\frac{1}{2a^{n+2}}$	112. $\frac{(x-y)^4 - (a+b)^4}{(a+b)^2 \cdot (x-y)^2}$	



4 Extraire la racine

4.1 Généralités

Extraire la racine est l'inverse d'élever à la puissance.

$$a = b^n \rightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

Exposant de la racine

Radicand (base)

Extraire une racine puis élever à la puissance avec le même exposant s'annule.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

p.ex. $(\sqrt[3]{27})^3 = 27$

Cependant, cela ne s'applique pas toujours dans le sens inverse:

$$\sqrt[4]{(-4)^4} = \sqrt[4]{256} = 4 \neq -4 !$$

De manière générale:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$n \rightarrow$ nombre pair

$a \rightarrow$ nombre quelconque

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$n \rightarrow$ nombre impair

Pour les racines carrées, on omet généralement l'exposant de racine:

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

4.2 Extraire la racine de nombres

Pour calculer une racine carrée sans calculatrice ni tableau des racines carrées, on décompose le nombre de droite à gauche en groupes de 2 chiffres chacun.

Pour le calcul, la formule suivante s'applique:

$$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c + \dots$$

p. ex: $(a + b + c)^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$
 $= a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$
 $= a^2 + b(2a + b) + c(2a + 2b + c)$

En pratique, on utilise actuellement des moyens électroniques!



4.3 Addition et soustraction de racines

On ne peut regrouper en un seul terme que des racines ayant les mêmes exposants et radicands.

On additionne ou on soustrait les coefficients pour cela:

$$a^n\sqrt[n]{a} + b^n\sqrt[n]{a} - c^n\sqrt[n]{a} = (a + b - c)^n\sqrt[n]{a}$$

Exemples:

$$1) \quad 3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{8} = \underline{(3+4-5)\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{8} = \underline{\underline{4}}}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 5\frac{1}{2}\sqrt[3]{cx} + 6\frac{1}{4}\sqrt[3]{cd} + \sqrt[3]{cx} - 8\frac{1}{2}\sqrt[3]{cd} &= \sqrt[3]{cx}\left(5\frac{1}{2} + 1\right) + \sqrt[3]{cd}\left(6\frac{1}{4} - 8\frac{1}{2}\right) \\ &= \underline{6\frac{1}{2}\sqrt[3]{cx} + \sqrt[3]{cd}\left(\frac{25}{4} - \frac{34}{4}\right)} \\ &= \underline{6\frac{1}{2}\sqrt[3]{cx} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{cd}} \\ &= \underline{6\frac{1}{2}\sqrt[3]{cx} - 2\frac{1}{4}\sqrt[3]{cd}} \end{aligned}$$



4.4 Extraire la racine de produits

On extrait la racine carrée d'un produit en extrayant la racine carrée de chaque facteur et en multipliant les résultats entre eux:

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} \quad a, b \geq 0; \quad n \rightarrow nb \text{ nat.}$$

Si un facteur est ramené sous la racine carrée, on a:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n * b}$$

Exemples:

$$1) \quad 3\sqrt{36xy} = 3\sqrt{36}\sqrt{xy} = 18\sqrt{xy}$$

$$2) \quad a\sqrt{\frac{3}{4}} * b\sqrt{\frac{8}{9}} * c\sqrt{\frac{3}{2}} = abc\sqrt{\frac{3}{4} * \frac{8}{9} * \frac{3}{2}} = abc$$

$$3) \quad 2\sqrt{32x} = 2\sqrt{2 * 16x} = 2 * 4\sqrt{2x} = 8\sqrt{2x}$$

$$4) \quad \sqrt{144u + 144v} = \sqrt{144(u + v)} = 12\sqrt{u + v}$$

Solutions des exercices : voir chap. 4.8 dernière page (Kusch p. 160 1-13)

4.5 Extraire la racine de quotients

On extrait la racine carrée d'une fraction, en divisant la racine du numérateur par la racine du dénominateur:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a \geq 0; \quad b > 0;$$

$$n \rightarrow nb \text{ nat.}$$

Exemples:

$$1) \quad \sqrt[3]{\frac{27a}{8b}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$2) \quad 7 \sqrt[3]{\frac{8nx}{343x^2} * 64ab} = 7 \sqrt[3]{\frac{8 * 64}{343} * \frac{abn}{x}} = 7 * \frac{2 * 4}{7} \sqrt[3]{\frac{abn}{x}} = 8 \sqrt[3]{\frac{abn}{x}}$$

$$3) \quad \sqrt{\frac{15x^2}{180x}} : \sqrt{\frac{10x}{30}} = \sqrt{\frac{15x^2}{180x} * \frac{30}{10x}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



4.6 Extraire la racine de puissances

On extrait la racine d'une puissance en prenant la racine de la base et en élevant le résultat à la puissance de l'exposant de la base:

$$\sqrt[n]{a^x} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^x \quad a \geq 0$$

Exemple de nombre: $\sqrt{9^3} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$

Il est possible de raccourcir et de rallonger les exposants des racines et les exposants de base:

$$\sqrt[n]{a^{bx}} = \sqrt[n]{a^x} \quad a \geq 0$$

Chaque racine peut être convertie en une puissance avec des fractions comme exposant. L'exposant de la racine est indiqué dans le dénominateur de l'exposant de la puissance:

$$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}} \quad a \geq 0$$

Exemples:

$$1) \quad \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$2) \quad \sqrt{\frac{4a^4c^2}{9n^2x^6}} = \frac{2a^2c}{3nx^3}$$

$$3) \quad \sqrt[u+v]{(ax)^{2(u+v)}} = (ax)^2 = \underline{a^2x^2}$$



$$\begin{aligned}
 4) \quad (\sqrt[4]{a})^2 * (\sqrt[6]{a})^3 * a^0 * a^1 &= \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 * \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 * 1 * a = a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{2}} * a \\
 &= a^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} * a = a^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \left[(n+x)^{\frac{3}{4}} * \sqrt[4]{(n+x)^5}\right]^2 &= \left[(n+x)^{\frac{3}{4}} * (n+x)^{\frac{5}{4}}\right]^2 \\
 &= \left[(n+x)^{\frac{3}{4} + \frac{5}{4}}\right]^2 \\
 &= (n+x)^{\frac{8}{4} * 2} = (n+x)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \sqrt[10]{a^{25}} : \left(a * a^{\frac{4}{5}} * a^{\frac{7}{10}}\right) &= a^{\frac{25}{10}} : \left(a^{\frac{10}{10}} * a^{\frac{8}{10}} * a^{\frac{7}{10}}\right) \\
 &= a^{\frac{25}{10}} : \left(a^{\frac{10}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{10}}\right) \\
 &= a^{\frac{25}{10}} : a^{\frac{25}{10}} = 1
 \end{aligned}$$

OU:

$$a^{\frac{25}{10} - \frac{10}{10} - \frac{8}{10} - \frac{7}{10}} = a^0 = 1$$

Solutions des exercices : voir chap. 4.8 dernière page (Kusch p. 160 14-25)

4.7 Extraire la racine de racines

On extrait la racine d'une racine en multipliant les exposants de la racine et en extrayant la racine de la base avec le nouvel exposant:

$$\sqrt[n]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[nx]{a} \quad a \geq 0$$

Exemple de nombre: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

ou: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$

ou: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$

En extrayant la racine de racines, on peut permuter les exposants des racines:

$$\sqrt[n]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{a}} \quad a \geq 0$$

Exemples:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$2) \sqrt[4]{\sqrt[3]{z^2}} \star \sqrt[6]{\sqrt{z^{10}}} + \sqrt[9]{y^6 \star \sqrt[4]{y^{12}}} = \sqrt[12]{z^2} \star \sqrt[12]{z^{10}} + \sqrt[9]{y^6 \star y^{\frac{12}{4}}}$$

$$= z^{\frac{2}{12} + \frac{10}{12}} + y^{\frac{6+3}{9}} = y + z$$

Solutions des exercices : voir chap. 4.8 dernière page (Kusch p. 160/161 26-61)



4.8 Exercices: extraire la racine

Radizieren von Wurzeln

$$1. \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{9} = 3$$

$$2. \sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$$

$$3. \sqrt[x]{\sqrt[a^x]{}}$$

$$4. \sqrt[3]{\sqrt[3]{125x^3}}$$

$$5. \sqrt[3]{\sqrt[3]{512a^3}}$$

$$6. \sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$$

$$7. \sqrt{x^3} \sqrt{x^3}$$

$$8. \sqrt[5]{\sqrt[2]{x^5}} + 3 \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}$$

$$9. \sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} \cdot \sqrt[ax]{b^3}$$

$$10. \sqrt[a]{\sqrt[x]{a^3}} : \sqrt[ax]{a^8}$$

Vermischte Aufgaben zur Wiederholung

$$1. \sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} \\ = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{72} - \sqrt{18}$$

$$3. \sqrt{75} - \sqrt{48}$$

$$4. \sqrt{27} - \sqrt{12}$$

$$5. (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$6. \left(\frac{\sqrt{6} - 3}{3}\right)^2$$

$$7. (\sqrt{6} - 2) \cdot (\sqrt{6} + 2)$$

$$14. \sqrt{49a - 147b} = \sqrt{7^2(a - 3b)} = 7\sqrt{a - 3b}$$

$$15. \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^3$$

$$16. \left(5x \cdot \sqrt{\frac{2y}{50z^3}}\right)^2$$

$$17. \left(\frac{3x}{2y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^3}{x^2}}\right)^3$$

$$18. 2a^2\sqrt{9a^2 + 81} + 27a^2\sqrt{4a^2 + 36}$$

$$19. \sqrt{\frac{16a + 32b}{25x - 50y}}$$

$$20. \sqrt{\frac{4x^2}{9} - \frac{9y^2}{16}}$$

$$21. \frac{\sqrt{128a^2b^3}}{\sqrt{2b}}$$

$$22. \frac{\sqrt{125x^3y}}{\sqrt{5xy}}$$

$$23. \sqrt{\frac{50a}{27b}} : \sqrt{\frac{2a^3}{3b^3}}$$

Schaffen Sie die Wurzel aus dem Nenner weg (Nr. 8...13).

$$8. \frac{4}{\sqrt{3} - 1}$$

$$11. \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$9. \frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$12. \frac{2 + 3\sqrt{a}}{3 + 2\sqrt{a}}$$

$$10. \frac{16}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$13. \frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$$

$$24. \sqrt[3]{x^2 + 2xy + y^2} : \sqrt[3]{x^2 - y^2}$$

$$25. 1\frac{1}{9}\sqrt[3]{a} : \frac{7}{10}\sqrt[3]{ab}$$

$$26. \sqrt[a]{\sqrt{x^{2a}y^{6a}}}$$

$$27. \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$28. \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$29. \left(\frac{16}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$30. \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$31. 27^{-\frac{2}{3}}$$

$$32. \left(\frac{4x^4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$33. 3\sqrt{96x} - 2\sqrt{150x}$$

$$34. 4\sqrt{4a} + 3\sqrt{16a}$$



$$35. 36^{\frac{3}{2}} + 16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} - 125^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{1}{3}}$$

$$36. 16^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}} + 4^{\frac{3}{2}} - 144^{\frac{1}{2}}$$

$$37. 4x^{\frac{3}{4}} : 5x^{-\frac{2}{3}}$$

$$38. \sqrt[3]{x^{n+3}} + 2x\sqrt[3]{x^n}$$

$$39. \sqrt[3]{24a^4b^4c} + \sqrt[3]{81a^4bc^4} + \sqrt[3]{192ab^4c^4} - 4\sqrt[3]{3abc}$$

$$40. \sqrt[x]{a^{x+1} \cdot b} + \sqrt[x]{ab^{m+1}}$$

$$41. \sqrt[a]{\frac{x^{a+4}}{y^{a+3}}} + \sqrt[b]{\frac{x^{b+5}}{y^{6+b}}} - \sqrt[a]{\frac{x^{a+7}}{y^{8+a}}}$$

$$42. \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{y-2}} \cdot \sqrt[5]{x^{4-y}}$$

$$43. 4\sqrt[5]{(a-b)^3} \cdot \sqrt[5]{(a-b)^2} \cdot \sqrt[c]{c} - 3\sqrt[x]{(a-b)^{x-4}} \cdot \sqrt[c]{c} \cdot \sqrt[x]{(a-b)^4}$$

$$44. \sqrt[9]{\frac{(x+y)^6}{z^5}} \cdot \sqrt[9]{\frac{(x+y)^3}{z^4}}$$

$$45. \left(\sqrt{\frac{y^4}{x^3}} - \sqrt{\frac{x^3}{y^2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{x^5}{y^6}}$$

$$46. x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} - y\sqrt[3]{\frac{1}{y}}$$

$$47. \frac{2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}} + \frac{4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{bc}} - 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$$

$$48. \frac{\sqrt[m-x]{c^{m+3x}}}{\sqrt[m-x]{c^{4x}}} + \frac{\sqrt[m+x]{c^{3m+2x}}}{\sqrt[m+x]{c^{2m+x}}}$$

$$49. \frac{ax+bx}{\sqrt{(c+d)^{a+b}}} + \frac{ax-bx}{\sqrt{(c+d)^{a-b}}}$$

$$50. 12^{\frac{x^2-y^2}{2}} \sqrt{(m+n)^{x-y}} \cdot 7^{\frac{(x+y)^2}{2}} \sqrt{(m+n)^{x+y}}$$

$$51. \frac{2a-4b}{\sqrt{(x-y)^3}} : 3^{\frac{3a-6b}{2}} \sqrt{(x-y)^3}$$

$$52. \sqrt[9]{a^6 \cdot \sqrt[4]{a^{12}}} + \sqrt[6]{b^{10}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^2}}$$

$$53. \sqrt[8]{x\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$$

$$54. \sqrt[ab]{x^2} \cdot \sqrt[a]{\frac{b}{\sqrt{x}}}$$

$$55. \sqrt[x]{\frac{y}{a^2}} : \sqrt[xy]{a}$$

$$56. \left(\frac{a^{-3} \cdot a^0}{a^{-6}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$57. x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{x^{-9}}$$

$$58. \sqrt[3]{\frac{2}{4}} - \sqrt[2]{\frac{1}{8}}$$

$$59. 2x^{-\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$60. \frac{2}{a^{-3}} + \left(\frac{1}{a^4} \right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$61. F = \sqrt{2v^2 - v\sqrt{4v^2 - (v\sqrt{2})^2}}$$

Wie groß ist F für $v = 12$?



Solutions des exercices du chap. 4.8

1. 3

3. $\sqrt{a}$

5. $2\sqrt{2a}$

7. $x^2\sqrt[4]{x}$

9. $\sqrt[6]{b^3}$

2. $\sqrt[3]{2}$

4. $\sqrt{5x}$

6. $\sqrt{x}$

8. $4\sqrt{x}$

10. $\sqrt[6]{a}$

1. $6\sqrt{2}$

3. $\sqrt{3}$

5. $3 - 2\sqrt{2}$

6. $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{3}$

2. $3\sqrt{2}$

4. $\sqrt{3}$

Schaffen Sie die Wurzel aus dem Nenner weg (Nr. 8—13)

8. $\frac{4\sqrt{3} + 4}{3 - 1} = 2\sqrt{3} + 2$

11. $\frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{y}}{x - y}$

9. $6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

12. $\frac{6 + 5\sqrt{a} - 6a}{9 - 4a}$

10. $8\sqrt{5} + 8\sqrt{3}$

13. $4 + \sqrt{15}$

14. $7\sqrt{a - 3b}$

17. $\frac{27x}{8y}$

20. $\frac{1}{12}\sqrt{64x^2 - 81y^2}$

15. $\frac{1}{1728}$

18. $60a^2\sqrt{a^2 + 9}$

21. $8ab$

16. $\frac{x^2y}{z^3}$

19. $\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a + 2b}{x - 2y}}$

22. $5x$

23. $\frac{5b}{3a}$

24. $\sqrt[3]{\frac{x + y}{x - y}}$

29. $1\frac{1}{2}$

33. $2\sqrt{6x}$

25. $\frac{100}{63}\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}}$

30. $\frac{2}{5}$

34. $20\sqrt{a}$

26. xy^3

31. $\frac{1}{9}$

35. 222

27. $\frac{1}{3}$

32. $\frac{2x^2}{5}$

36. $-3,25$

28. $\frac{2}{3}$

37. $\frac{4}{5}x\sqrt[12]{x^5}$

38. $3x\sqrt[3]{x^n}$

39. $\sqrt[3]{3abc}(2ab + 3ac + 4bc - 4)$

42. x

40. $\sqrt[2]{ab} \cdot (a + \sqrt[2]{b^m})$

43. $\sqrt{c}(a - b)$

41. $\frac{x}{y} \left(\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{x^5}{y^4}} - \sqrt[3]{\frac{x^7}{y^5}} \right)$

44. $\frac{x + y}{z}$

45. $\frac{x}{y} - \frac{x^4}{y^4}$



46. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}$

47. $3\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$

48. $2c$

49. $2\sqrt[3]{c+d}$

50. $84^{\frac{x+y}{2}}\sqrt{(m+n)^2}$

51. $\frac{1}{3}$

52. $a + b$

53. $-3\sqrt{x}$

54. $\sqrt[ab]{x^3}$

55. $\sqrt[xy]{a}$

56. a

57. 1

58. $\frac{7}{64}$

59. $2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

60. $2a^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

61. $v\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 9,2$